

# Primjena *fixed-pole* interpolacije u linearnoj dinamičkoj analizi Timošenkovog grede

Žiković, L.<sup>1</sup> i Jelenić, G.<sup>2</sup>

## Sažetak

U ovome radu će se izvesti matrica masa prostornog Timošenkovog grednog konačnog elementa iz Hamiltonovog varijacijskog principa gdje će se zasebno koristiti dvije različite vrste tzv. *fixed-pole* interpolacije: originalna i poboljšana. U poboljšanoj *fixed-pole* interpolaciji uveden je koeficijent koji je ovisan o broju čvorova pojedinog elementa duž promatrane koordinatne osi dok je u originalnom pristupu on jednak jedinici. U radu [1] autori su pokazali da originalni pristup daje matricu krutosti koja je jednaka onoj dobivenoj Lagrangeovom interpolacijom, dok poboljšani pristup daje matricu krutosti koja je jednaka onoj dobivenoj Lagrangeovom interpolacijom uz primjenu reducirane integracije, čime je uklonjen problem *shear-locking*. Nakon dobivanja matrice masa i poznavanjem matrice krutosti, moguće je riješiti probleme vlastitih vrijednosti. Na primjernu slobodno oslonjene grede, za koju je analitičko rješenje vlastitih frekvencija poznato, analizirana su rješenja dvočvornih i tročvornih grednih konačnih elemenata uz primjenu obiju vrsta *fixed-pole* interpolacija te su ona uspoređena s rješenjima dobivenih uz primjenu Lagrangeovih interpolacija. Originalni *fixed-pole* pristup daje poboljšane rezultate za slučaj rijetkih mreža dvočvornih konačnih elemenata u odnosu na primjenu standardne Lagrangeove interpolacije, gdje poboljšanje proizlazi iz dobivene matrice masa, dok poboljšani pristup pruža puno bržu konvergenciju.

**Ključne riječi:** Timošenkova greda, mikropolarna teorija, vezana interpolacija, *fixed-pole* koncept, vlastite vrijednosti, metoda konačnih elemenata

---

<sup>1</sup> **Laura Žiković, mag. ing. aedif.**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: laura.zikovic@uniri.hr.

<sup>2</sup> **Prof. dr. sc. Gordan Jelenić**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: gordan.jelenic@uniri.hr.

## 1 Uvod

*Fixed-pole* interpolacija inspirirana je tzv. konceptom nepomičnog pola (eng. *fixed-pole concept*) kojeg su prvi put predstavili Bottasso i Borri u [2], gdje su koncept primijenili u geometrijsko nelinearnoj analizi 3D grede. Kao glavna zamisao koncepta je zamjena momentne rezultante naprezanja  $m$  i specifičnog momenta količine kretanja  $\pi$ , koje su prema Reissnerovom pristupu definirane s obzirom na referentnu os grede, s novim rezultatama, koje su sada definirane s obzirom na odabranu ishodišnu točku cijelog promatranog sustava (nepomičan pol). Također su uz pomoć konfiguracijskog tenzora, koji spada u posebnu grupu krutog kretanja SR(6) koja ja ujedno i Liejeva grupa, uspjeli spojiti polje pomaka i rotacije. Na taj način, objedinjeno polje pomaka i rotacija s obzirom na nepomičan pol čini novo nestandardno jedinstveno polje nepoznanica. Implementacija ovog koncepta pokazuje otpornost na *shear-locking* te sposobnost istovremenog očuvanja energije i vektora količine kretanja i momenta količine kretanja. Elementi, međutim, pate od neobjektivnosti s obzirom na odabir položaja promatrača, čak i u ravninskoj analizi, i posljedično od neinvarijantnosti deformacija obzirom na pomak krutog tijela [3]. Do unatrag godinu dana nisu bila poznata nikakva istraživanja koncepta u linearnoj analizi gdje se i dalje očekuje jedinstveni opis svih nepoznatih polja kao prednost koncepta, dok složenosti i nedostaci koji se javljaju u nelinearnoj analizi iščezavaju (konfiguracijski tenzor postaje linearan te problem neobjektivnosti nestaje). Autori su u radu [1] predstavili primjenu *fixed-pole* interpolacije ili srodne vezane interpolacije u linearnoj analizi mikropolarnog kontinuuma, gdje su originalnu formulaciju poboljšali s uvođenjem koeficijenta koji je ovisan o broju čvorova pojedinog elementa duž koordinatne osi. Tako poboljšana formulacija daje matricu krutosti koja je jednaka onoj koju daje Lagrangeova interpolacija ali uz primjenu reducirane integracije. Na taj način, primjena koncepta na Timošenkovoj gredi eliminira pojavu *shear-lockinga*. Ovaj koncept je moguće primijeniti na gredne elemente za proizvoljan broj čvorova. S obzirom na to da Timošenkova greda zapravo predstavlja 1D mikropolarni kontinuum, tako razvijeni konačni element predstavlja osnovu za daljnji razvoj 2D i 3D mikropolarnih konačnih elemenata. Poboljšana *fixed-pole* interpolacija daje jednaku formulaciju kao što daje vezana interpolacija za koju je poznato da daje egzaktno rješenje Timošenkove grede [4] te poboljšanu točnost kod 2D mikropolarnih elemenata [5]. *Fixed-pole* interpolacija se na jednostavan i elegantan način generalizira na 3D mikropolarne konačne elemente, gdje je pokazana puno brža konvergencija u odnosu na Lagrangeove mikropolarne elemente kao i robusnost kod distorzirane mreže [6].

U nastavku će, u okviru analize vlastitih vrijednosti Timošenkove grede, biti predstavljena motivacija za primjenu koncepta nepomičnog pola u linearnoj dinamičkoj analizi mikropolarnog kontinuuma.

## 2 Originalna i poboljšana *fixed-pole* interpolacija

U ovome radu će se za opisivanje nepoznatih polja prostorne Timošenkove grede duljine  $L$ , s dva ili više čvorova, koristiti dvije vrste *fixed-pole* interpolacija: originalna i poboljšana te će se dobiveni rezultati usporediti i s onima dobivenih interpolacijom Lagrangeovim polinomima. Kao što je u Uvodu rečeno, *fixed-pole* koncept uvodi novo kinematičko polje koje objedinjuje polje pomaka  $u$  i rotacije  $\theta$  s obzirom na nepomični pol te su sada naša nepoznata polja  $\rho$  i  $\theta$ , gdje je novo polje  $\rho$  izraženo prema [1]

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{u} + \frac{1}{n} \hat{\mathbf{r}} \boldsymbol{\theta}, \quad (1)$$

gdje je koeficijent  $\frac{1}{n}$  ovisan o broju čvorova  $n$  pojedinog elementa duž koordinatne osi (koji je uveden umjesto jediničnog koeficijenta u originalnom *fixed-pole* pristupu s ciljem izboljšanja rezultata), operator  $\hat{\mathbf{r}}$  označava antisimetričnu matricu koja zamjenjuje vektorski produkt tako da vrijedi  $\mathbf{r} \times \boldsymbol{\theta} = \hat{\mathbf{r}} \boldsymbol{\theta}$  te je  $\mathbf{r}$  vektor položaja referentne osi duž grede s obzirom na promatrano ishodište koordinatnog sustava

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \mathbf{r}_i, \quad (2)$$

koji je interpoliran standardnim Lagrangeovim interpolacijskim polinomima  $N_i$ . Interpolira li se na isti način i novo polje  $\boldsymbol{\rho}$ , iz izraza (1) slijedi  $\mathbf{u} = \mathbf{N}_u \mathbf{p}$ , gdje je matrica interpolacijskih funkcija polja pomaka  $\mathbf{N}_u$  jednaka

$$\mathbf{N}_u = [\mathbf{N}_1 \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{N}_n \quad \mathbf{0}] - \frac{1}{n} \hat{\mathbf{r}} [\mathbf{0} \quad \mathbf{N}_1 \quad \dots \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{N}_n] \quad (3)$$

dok je matrica interpolacijskih funkcija za polje rotacije koju koristimo u  $\boldsymbol{\theta} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \boldsymbol{\theta}_i \equiv \mathbf{N}_\theta \mathbf{p}$  jednaka  $\mathbf{N}_\theta = [\mathbf{0} \quad \mathbf{N}_1 \quad \dots \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{N}_n]$ , gdje su  $\mathbf{N}_i$  podmatrice Lagrangeove interpolacijske funkcije

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (4)$$

za svaki čvor pojedinog konačnog elementa  $i = 1 \dots n$ , što se može primijeniti za proizvoljno odabran broj čvorova  $n$ . Vektor  $\mathbf{p}$  je vektor stupnjeva slobode  $\mathbf{p}^T = \langle \mathbf{p}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{p}_n^T \rangle$ , gdje je  $\mathbf{p}_i^T = \langle \boldsymbol{\rho}_i^T \quad \boldsymbol{\theta}_i^T \rangle$ . Kako bi se usporedio poboljšani *fixed-pole* pristup predstavljen ovdje s originalnim, u izrazima (1) i (3) će se koeficijent  $\frac{1}{n}$  zamijeniti jedinicom. Poboljšana *fixed-pole* interpolacija identična je vezanoj interpolaciji izvedenoj u [4] koja daje točna rješenja za općenito polinomsko opterećenje te time eliminira pojavu *shear-lockinga*.

Dobivene matrice krutosti prema originalnom pristupu jednake su matricama krutosti koje se dobiju uz primjenu Lagrangeovih interpolacijskih polinoma uz punu integraciju, dok se kod poboljšanog pristupa dobivaju matrice krutosti koje su jednake onima koje se dobiju uz upotrebu Lagrangeovih interpolacijskih funkcija ali uz primjenu reducirane integracije [1].

### 3 Izvod matrice mase

Za dobivanje matrice mase koristiti će se Hamiltonov varijacijski princip (koji predstavlja dinamički ekvivalent principu stacionarnosti ukupne potencijalne energije u statici)

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0 \quad (5)$$

gdje je funkcional Lagrangea jednak razlici ukupne kinetičke energije  $T$  i ukupne potencijalne energije  $U$ , tj.  $L = T - U$ . Ukupna potencijalna energija jednaka je  $U = V_i - V_e$ , gdje su  $V_i$  i  $V_e$  energija deformacije i rad vanjskih sila:

$$V_i = \frac{1}{2} \int_0^L (\mathbf{\Gamma}^T \mathbf{C}_n \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\kappa}^T \mathbf{C}_m \mathbf{\kappa}) dx, \quad (6)$$

$$V_e = \int_0^L (\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{n}} + \boldsymbol{\theta}^T \bar{\mathbf{m}}) dx, \quad (7)$$

gdje je  $\mathbf{\Gamma}$  vektor normalnih i posmičnih deformacija,  $\mathbf{\kappa}$  je vektor rotacijskih deformacija (zakrivljenosti) [1],  $\mathbf{C}_n = \text{diag}(EA, GA_2, GA_3)$  i  $\mathbf{C}_m = \text{diag}(GI_t, EI_2, EI_3)$  su dijagonalne konstitutivne matrice,  $E$  i  $G$  su moduli elastičnosti i smicanja,  $A$  je površina presjeka,  $A_2$  i  $A_3$  su odgovarajuće posmične površine presjeka duž glavnih osi presjeka,  $I_t$  je torzijska konstanta presjeka, a  $I_2$  i  $I_3$  su glavni momenti površine drugog reda presjeka. Vanjska distribuirana opterećenja duž segmenta opisana su vektorom sila i momenta  $\bar{\mathbf{n}}$  i  $\bar{\mathbf{m}}$ . Kinetička energija jednaka je

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L (A\rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} + \rho \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\theta}}) dx, \quad (8)$$

gdje je  $\rho$  gustoća grede, operator  $\dot{\phantom{x}}$  označava derivaciju vektora pomaka i rotacije po vremenu, tenzor  $\mathbf{J} = \text{diag}(I_2 + I_3, I_2, I_3)$ . Iz Hamiltonovog principa dobiva se jednačba kretanja

$$\mathbf{K}\mathbf{p} + \mathbf{M}\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R}, \quad (9)$$

gdje je  $\mathbf{K}$  matrica krutosti,  $\mathbf{M}$  matrica masa i  $\mathbf{R}$  vektor ekvivalentnog opterećenja u čvorovima. Uvrštavanjem odabranih interpolacijskih funkcija u izraz za kinetičku energiju dobije se

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L (A\rho \dot{\mathbf{p}}^T \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u \dot{\mathbf{p}} + \rho \dot{\mathbf{p}}^T \mathbf{N}_\theta^T \mathbf{J} \mathbf{N}_\theta \dot{\mathbf{p}}) dx, \quad (10)$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{p}}^T (\mathbf{M}_T + \mathbf{M}_R) \dot{\mathbf{p}}, \quad (11)$$

gdje  $\mathbf{M}_T$  i  $\mathbf{M}_R$  predstavljaju matrice masa za translacijsku i rotacijsku inerciju. Ukupna matrica mase  $\mathbf{M}$  jednaka je

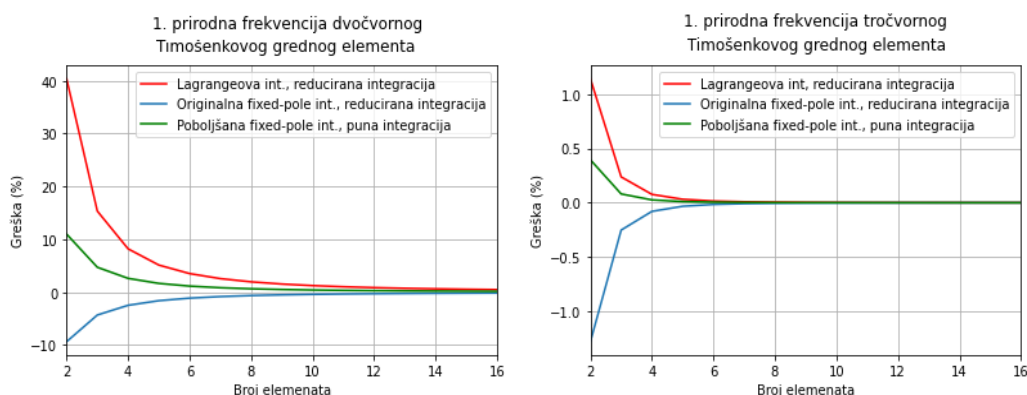
$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_T + \mathbf{M}_R = A\rho \int_0^L (\mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u) dx + \rho \int_0^L (\mathbf{N}_\theta^T \mathbf{J} \mathbf{N}_\theta) dx. \quad (12)$$

Za dobivanje matrice krutosti i matrice masa korištene su jednake interpolacijske funkcije te se matrica masa u izrazu (12) naziva konzistentnom matricom masa. Važno je naglasiti da *fixed-pole* formulacija koristi nestandardne stupnjeve slobode koje se lako mogu izraziti preko standardnog polja pomaka poznajući izraz (1). Dobivena matrica masa prema originalnom *fixed-pole* pristupu (gdje koeficijent  $\frac{1}{n}$  zamjenjujemo jedinicom) različita je od matrice mase dobivene standardnom Lagrangeovom interpolacijom, a prema poboljšanom *fixed-pole* pristupu dobivena matrica masa jednaka je onoj dobivenoj uz primjenu vezane interpolacije.

## 4 Numerički primjer slobodno oslonjene grede

Poznavanjem matrice mase i matrice krutosti moguće je izračunati svojstvene vrijednosti na primjeru slobodno oslonjene grede, čije je analitičko rješenje poznato [7]. Proračun baziran na metodi konačnih elemenata proveden je u programskom jeziku *Python*. Dana je usporedba rezultata prvih prirodnih frekvencija dobivenih upotrebom Lagrangeovih polinoma te obje vrste *fixed-pole* interpolacije za slučaj dvočvornih i tročvornih grednih konačnih elemenata. Analizira se konvergencija rezultata prema egzaktnom rješenju u ovisnosti o broju konačnih elemenata te povećanju broja čvorova pojedinog elementa.

Razmotrimo slobodno oslonjenu gredu duljine  $L = 4.0$  m, s navedenim geometrijskim i materijalnim karakteristikama [8]:  $EA = 7.5 \cdot 10^5$ ,  $GA_2 = GA_3 = 2.6 \cdot 10^5$ ,  $EI_2 = 15624$ ,  $EI_3 = 156.24$ ,  $GI_t = 244$ ,  $\rho A = 6.25 \cdot 10^{-2}$ ,  $\rho I_2 = 1.302 \cdot 10^{-3}$ ,  $\rho I_3 = 10^{-5}$ . Originalna *fixed-pole* interpolacija daje matricu krutosti koja je jednaka onoj dobivenoj Lagrangeovim interpolacijskim polinomima uz primjenu pune integracije, dok su njihove matrice mase različite. To rezultira sporijom konvergencijom, gdje je za promatrani slučaj za mrežu od 32 elemenata pogreška od oko 78% za obje interpolacije, stoga će se ovdje primijeniti reducirana numerička integracija za matrice krutosti. Kod poboljšane *fixed-pole* interpolacije, uz primjenu pune numeričke integracije dobije se identična matrica krutosti kao kod Lagrangeovih interpolacijskih funkcija uz primjenu reducirane integracije. Najveći doprinos odabranih interpolacijskih funkcija u dinamičkoj analizi vidljiv je kod formulacije matrice masa. Na slici 1. su prikazane konvergencijske krivulje prvih prirodnih frekvencija za slučaj dvočvornih i tročvornih grednih konačnih elemenata uz primjenu navedenih interpolacijskih funkcija. Za dvočvorni konačni element vidljiva je brža konvergencija primjenom originalnog *fixed-pole* pristupa u odnosu na Lagrangeovu interpolaciju, međutim, kod tročvornih grednih elemenata njihovi rezultati se gotovo u potpunosti poklapaju (suprotnih predznaka). Poboljšana *fixed-pole* interpolacija pruža puno bržu konvergenciju za oba slučaja.



Slika 1. Konvergencijske krivulje prvih prirodnih frekvencija slobodno oslonjene Timoškove grede za slučaj dvočvornih (lijevo) i tročvornih (desno) grednih konačnih elemenata uz primjenu predstavljenih interpolacijskih funkcija.

## 5 Zaključak i budući rad

U radu je izvedena matrica masa pomoću dviju vrsta *fixed-pole* interpolacija: originalna i poboljšana. Na primjeru slobodno oslonjene grede se analizirala brzina konvergencije prema egzaktnom rješenju prve prirodne frekvencije za slučaj primjene dvočvornih i tročvornih prostornih Timošenkovih konačnih elemenata. Za razliku od statičke analize, kod dvočvornih grednih konačnih elemenata originalni pristup uz primjenu reducirane numeričke integracije za matricu krutosti ima određenu stopu poboljšanja u odnosu na linearnu interpolaciju, također uz primjenu reducirane integracije, dok u slučaju primjene grednih elemenata s više čvorova to poboljšanje iščezava. Poboljšana *fixed-pole* interpolacija pokazuje značajno bržu konvergenciju u odnosu na originalnu i Lagrangeovu interpolaciju. Dobiveni rezultati predstavljaju motivaciju za daljnju dinamičku analizu Timošenkove grede, kao i generalizaciju na 2D i 3D mikropolarni kontinuum.

### Zahvale

Rezultati prikazani u ovom radu dobiveni su u sklopu rada na projektu IP 1732 Hrvatske zaklade za znanost (Fixed-Pole Concept in Numerical Modelling of Cosserat Continuum). Istraživanje je dodatno podržalo Sveučilište u Rijeci putem potpore br. 1413 (Računski i eksperimentalni postupci za određivanje materijalnih parametara Cosseratovog kontinuuma).

### Literatura

- [1] Žiković, L. i Jelenić, G., “Fixed-pole interpolacija u linearnoj analizi mikropolarnog kontinuuma,” in *Zbornik radova 10. susreta Hrvatskog društva za mehaniku*, 2020, pp. 313–318.
- [2] Bottasso, C. L. i Borri, M., “Integrating finite rotations,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 164, no. 3–4, pp. 307–331, 1998, doi: 10.1016/S0045-7825(98)00031-0.
- [3] Gaćeša, M. i Jelenić, G., “Modified fixed-pole approach in geometrically exact spatial beam finite elements,” *Finite Elem. Anal. Des.*, vol. 99, pp. 39–48, 2015, doi: 10.1016/j.finel.2015.02.001.
- [4] Jelenić, G. i Papa, E., “Exact solution of 3D Timoshenko beam problem using linked interpolation of arbitrary order,” *Arch. Appl. Mech.*, vol. 81, no. 2, pp. 171–183, 2011, doi: 10.1007/s00419-009-0403-1.
- [5] Grbčić, S., Jelenić, G. i Ribarić, D., “Quadrilateral 2D linked-interpolation finite elements for micropolar continuum,” *Acta Mech. Sin. Xuebao*, vol. 35, no. 5, pp. 1001–1020, 2019, doi: 10.1007/s10409-019-00870-1.
- [6] Žiković, L. i Jelenić, G., “Fixed-pole interpolation in linear numerical static and dynamic analysis of the micropolar continuum,” (*preprint*), 2021.
- [7] Timoshenko, S., *Vibration Problems In Engineering*. New York: D.Van Nostrand Company INC., 1937.
- [8] Rukavina, T. i Jelenić, G., “Izvod matrice masa interpolacijom ovisnom o problemu za prostorni Timošenkov konačni element,” in *Zbornik radova 6. susreta Hrvatskog društva za mehaniku*, 2014, pp. 185–190.