

SVEUČILIŠTE U RIJECI
GRAĐEVINSKI FAKULTET

Damjan Jurković

**Analitička i eksperimentalna analiza čistog savijanja heterogenih i
homogenih uzoraka**

Završni rad

Rijeka, 2020

SVEUČILIŠTE U RIJECI
GRAĐEVINSKI FAKULTET

Sveučilišni preddiplomski studij

Građevinarstvo

Otpornost materijala I

Damjan Jurković

JMBAG: 0114029770

**Analitička i eksperimentalna analiza čistog savijanja heterogenih i
homogenih uzoraka**

Završni rad

Rijeka, rujan 2020

Naziv studija: **Sveučilišni preddiplomski studij Građevinarstvo**

Znanstveno područje: Tehničke znanosti

Znanstveno polje: Temeljne tehničke znanosti

Znanstvena grana: Tehnička mehanika

Tema završnog rada

**ANALITIČKA I EKSPERIMENTALNA ANALIZA ČISTOG SAVIJANJA HOMOGENIH I
HETEROGENIH NOSAČA
ANALYTICAL AND EXPERIMENTAL ANALYSIS OF PURE BENDING IN HOMOGENEOUS
AND HETEROGENEOUS STRUCTURES**

Kandidat: **DAMJAN JURKOVIĆ**

Kolegij: **OTPORNOST MATERIJALA 1**

Završni rad broj: **20-P-38**

Zadatak:

U radu je potrebno analizirati problem čistog savijanja grednih nosača konstantnog i promjenjivog poprečnog presjeka i izvesti izraze za deformacije najnapregnutijih vlakana grednom teorijom. Rezultate je potrebno usporediti s laboratorijskim mjerenjima i kritički ocijeniti primjenjivost gredne teorije.

Tema rada je uručena: 24. veljače 2020.

Mentor:

prof. dr. sc. Gordan Jelenić,
dipl. ing. građ.

IZJAVA

Završni rad sam izradio samostalno, u suradnji s mentorom uz poštivanje pozitivnih građevinskih propisa i znanstvenih dostignuća iz područja građevinarstva. Građevinski fakultet u Rijeci je nositelj prava intelektualnog vlasništva u odnosu na ovaj rad.

Damjan Jurković

U Rijeci, 8. rujna 2020.

IZJAVA

Završni rad nastao je kao rezultat aktivnosti u okviru znanstvenog projekta *Fixed-Pole Concept in Numerical Modelling of Cosserat Continuum* (HRZZ-IP-2018-01-1732), kojega financira Hrvatska zaklada za znanost te sveučilišne potpore Sveučilišta u Rijeci *Computational and Experimental Procedures for Assessment of Material Parameters in Cosserats' Continuum* (uniri-tehnic-18-248 1415), a u radu je korištena laboratorijska oprema nabavljena unutar infrastrukturnog projekta *Razvoj istraživačke infrastrukture na kampusu Sveučilišta u Rijeci* (RC.2.2.06-0001) koji je sufinanciran iz Europskog fonda za regionalni razvoj (EFRR) i Ministarstva znanosti, obrazovanja i sporta RH.

Gordan Jelenić

U Rijeci, 7.9.2020.

Sažetak

Ovaj rad razmatra deformacije pri čistom savijanju homogenih i heterogenih nosača. Deformacije su analizirane analitičkim putem i eksperimentalno, metodom tenzometrije. Definirane su osnovne postavke i svojstva potrebna za analizu čistog savijanja te prikazani primjeri savijanja iz prakse. Izvedena je funkcija momenta tromosti heterogenog oslabljenog nosača. Cilj rada je provjera primjenjivosti gredne teorije za analizu heterogenih izotropnih i ortotropnih nosača. Zaključeno je kako su rezultati dobiveni analitičkom primjenom gredne teorije približno jednaki onima dobivenim mjerenjima, no gredna teorija ne može dati odgovor na brojna pitanja i probleme koji se pojavljuju tokom analize. Najveći problem je razlika u odstupanju rezultata s obzirom na geometriju ortotropnosti uzoraka, te to što su vrijednosti deformacija dobivene analitičkim putem manje od stvarnih, što grednu teoriju čini ne primjenjivom za ovaj problem.

Ključne riječi: Čisto savijanje, moment tromosti, gredna teorija, metoda tenzometrije, heterogeni nosači

Abstract

This paper considers deformation in pure bending of homogeneous and heterogeneous beams. The strains are analysed analytically and experimentally. Basic settings and properties needed for the analysis of pure bending are defined and examples of bending from practice are presented. The second moment of area function of the heterogeneous weakened beam is derived. The aim of this paper is to test the applicability of the beam theory for the analysis of heterogeneous isotropic and orthotropic beams. It is concluded that the results obtained by application of the beam theory are approximately equal to those obtained by measurements, but the beam theory cannot provide an answer to a number of questions and problems that arise during the analysis. The biggest problem is the difference in the deviation of the results with respect to the geometry of the orthotropy of the samples, and the fact that the strains obtained analytically are smaller than the real ones, which makes the beam theory not applicable to this problem.

Keywords: Pure bending, second moment of area, beam theory, strain-gauge measurement, heterogeneous beams

Sadržaj

1	UVOD.....	1
2	SAVIJANJE RAVNIH NOSAČA.....	2
2.1	Općenito o savijanju.....	2
2.2	Čisto savijanje.....	6
3	GEOMETRIJSKE KARAKTERISTIKE PRESJEKA.....	15
3.1	O geometrijskim karakteristikama presjeka	15
3.2	Statički moment	16
3.3	Moment tromosti (inercije).....	17
3.3.1	<i>Pravokutni poprečni presjek</i>	22
3.4	Momenti otpora.....	23
4	SAVIJANJE U PRAKSI	25
4.1	Savijanje u realnim konstrukcijama	25
4.2	Čisto savijanje.....	29
4.3	Odabir presjeka	29
5	PROBLEM HETEROGENIH NOSAČA	33
5.1	O heterogenim nosačima	33
5.2	Heterogeni nosači HMD i LMD strukture	34
6	ANALITIČKO RJEŠENJE PROBLEMA	38
7	EKSPERIMENTALNO RJEŠENJE PROBLEMA.....	48
7.1	O tenzometriji	48
7.2	Mjerenja deformacije i rezultati.....	53
8	ZAKLJUČAK	66
9	LITERATURA I IZVORI	67

Popis tablica

Tablica 1: Geometrija oslabljenja nosača.....	35
Tablica 2: Geometrija nosača B2 i B3.....	36
Tablica 3: Geometrija opterećenog nosača.....	37
Tablica 4: Deformacija nosača HMD B3 i LMD B3.....	46
Tablica 5: Deformacije uzoraka izmjerene metodom tenzometrije	63
Tablica 6: Izmjerene deformacije uzoraka HMD B3 i LMD B3 pri opterećenju $F = 1,25$ kN ...	63
Tablica 7: Izmjerene deformacije uzoraka HMD B3 i LMD B3 pri opterećenju $F = 1,25$ kN ...	64
Tablica 8: Usporedba izmjerenih i analitički dobivenih deformacija.....	64

Popis slika

Slika 1: Nosač opterećen na savijanje	2
Slika 2: Element lijevo od presjeka 0_1 i izrezani element duljine dx	3
Slika 3: Sustavi pod djelovanjem čistog savijanja	5
Slika 4: Štap opterećen koncentriranim momentima	6
Slika 5: Deformacija elemenata mreže nosača pri opterećenju	8
Slika 6: Izrezani element iz sustava sa slike 5	9
Slika 7: Raspodjela naprezanja u presjeku	11
Slika 8: Zakret krajnjih presjeka nosača	14
Slika 9: Utjecaj orijentacije presjeka na progib	15
Slika 10: Statički moment tromosti presjeka	16
Slika 11: Predznak momenata tromosti ovisno o rotaciji koordinatnog sustava.....	18
Slika 12: Simetrija presjeka ovisno o osi y	18
Slika 13: Suma ili razlika momenata tromosti segmenata presjeka	19
Slika 14: Moment tromosti s obzirom na paralelni koordinatni sustav.....	20
Slika 15: Moment tromosti pravokutnog poprečnog presjeka	23
Slika 16: AB greda opterećena stropnom konstrukcijom [2].....	26
Slika 17: Drvene grede opterećene stropnom konstrukcijom [3]	26
Slika 18: Drvene grede prenose opterećenje na AB gredu [4]	27
Slika 19: AB greda preuzima koncentrirana opterećenja čeličnih greda [5]	28
Slika 20: Betonski nadvoj u zidanoj konstrukciji [6]	28
Slika 21: Nosač pod "Four-point load" opterećenjem.....	29
Slika 22: Moment otpora presjeka jednake površine	31
Slika 23: Nosači HMD B3 i LMD B3	34
Slika 24: Nosači HMD B2 i LMD B2	35
Slika 25: Struktura heterogenih nosača.....	36
Slika 26: "Four point load" opterećenje	37
Slika 27: Opterećenje nosača HMD B3 i LMD B3.....	38
Slika 28: Presjeci 1 – 1 i 2 – 2	39
Slika 29: Element između presjeka 1-1 i 2-2 za HMD i LMD	42
Slika 30: Oslabljenja u strukturi nosača.....	43
Slika 31: Tenzometri 1 – LY41 – 6/120	49
Slika 32: Radni dijagram čelika	49
Slika 33: Promjena promjera u ovisnosti promjene dužine žice	50
Slika 34: Wheatstoneov mjerni most	52
Slika 35: Povezani tenzometri na uzorku FM B2	54
Slika 36: Uzorak FM B2 u hidrauličnoj preši	55
Slika 37: $\epsilon - t$ dijagram uzorka FM B2 – 1	55
Slika 38: $\epsilon - t$ dijagram uzorka FM B2 – 2	56
Slika 39: $\epsilon - t$ dijagram uzorka FM B2 – 3	56
Slika 40: $\epsilon - t$ dijagram uzorka HMD B2 – 1	57
Slika 41: $\epsilon - t$ dijagram uzorka HMD B2 – 2.....	57
Slika 42: $\epsilon - t$ dijagram uzorka HMD B2 – 3.....	58
Slika 43: $\epsilon - t$ dijagram uzorka LMD B2 – 1	59

Slika 44: $\epsilon - t$ dijagram uzorka LMD B2 - 2	59
Slika 45: $\epsilon - t$ dijagram uzorka LMD B2 - 3	59
Slika 46: $\epsilon - t$ dijagram uzorka HMD B3 - 1	60
Slika 47: $\epsilon - t$ dijagram uzorka HMD B3 - 2	60
Slika 48: $\epsilon - t$ dijagram uzorka HMD B3 - 3	61
Slika 49: $\epsilon - t$ dijagram uzorka LMD B3 - 1	61
Slika 50: $\epsilon - t$ dijagram uzorka LMD B3 - 2	62
Slika 51: $\epsilon - t$ dijagram uzorka LMD B3 - 3	62
Slika 52: Dijagram odnosa izmjerenih i analitički dobivenih deformacija	65

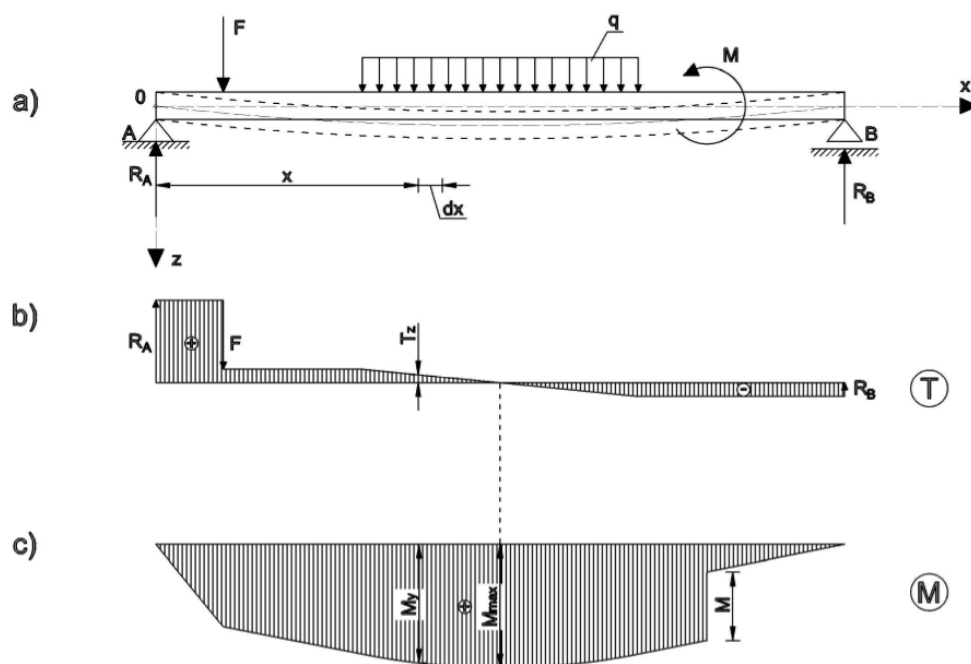
1 UVOD

Savijanje je sveprisutan problem u inženjerskoj praksi. Ono je rezultat opterećenja na horizontalne štapove čija se uzdužna os deformira u neku funkciju krivulje. Takve štapove nazivamo nosačima ili gredama. Problem savijanja počeo se proučavati još u renesansnom dobu s početcima onoga što danas nazivamo suvremena znanost. Danas imamo zapise koji govore o proučavanju greda od Leonarda da Vincija i njegovom zapažanju ovisnosti čvrstoće i duljine grede [1]. Ovisno o tome jeli greda opterećena kontinuiranim opterećenjem, tj. sudjeluju li poprečne sile u savijanju, razlikujemo savijanje poprečnim silama i čisto savijanje, a ovisno o tome dešava li se savijanje u jednoj od glavnih osi nosača razlikujemo ravno i koso savijanje. U ovom radu razmatrati će se čisto i ravno savijanje kod nosača s konstantnom fleksijskom krutošću ($EI_y = \text{konst.}$), no i kod onih nosača čija krutost nije konstantna koje smo nazvali heterogenima. Uz suvremene metode obrade podataka i proizvodnje elemenata možemo stvarati nosače veće krutosti s manjim utroškom materijala. Ovaj rad istražuje mogu li se klasične metode gredne teorije primijeniti za izračun deformacija heterogenih nosača, te ako da, koliko su točne. Čisto savijanje je specifično jer se pojavljuje bez prisutnosti poprečnih sila unutar nosača, te je time moment savijanja konstantan. Kao posljedica toga elastična linija se deformira u oblik kružnog luka. To čini čisto savijanje gotovo nemoguće za naći u realnim konstrukcijama, no i više je nego korisno za eksperimentalne analize. Nakon detaljnije analize čistog savijanja i povezivanja s momentom tromosti kao geometrijskog faktora koji sudjeluje u fleksijskoj krutosti elementa rad će istražiti svojstva heterogenih nosača analitičkim te eksperimentalnim putem, metodom tenzometrije. Ispitani su aluminijski nosači s dvije različite strukture heterogenosti za dvije geometrije nosača. Rad je završen usporedbom deformacija dobivenih analitičkim i eksperimentalnim putem te sudom jeli gredna teorija zadovoljavajuća za ovakve probleme ili je potrebna analiza metodama teorije elastičnosti.

2 SAVIJANJE RAVNIH NOSAČA

2.1 Općenito o savijanju

Za potrebe analize savijanja na slici 1 prikazan je horizontalan ravni štap opterećen koncentriranom silom, kontinuiranim opterećenjem i momentom savijanja u $x - z$ ravnini. Ta ravnina se naziva ravninom opterećenja i ona sadrži uzdužnu os štapa. Uslijed djelovanja opterećenja dani štap se deformira na način da mu se uzdužna os pretvara u krivulju. Konkavno deformirana vlakna štapa se skraćuju, a konveksno deformirana vlakna se produljuju, što na ovom primjeru rezultira time da se vlakna iznad osi štapa skraćuju, a ona ispod osi produljuju. Prilikom savijanja u poprečnom presjeku štapa pojavljuju se unutarnje sile, poprečna sila i moment, no ako se pojavljuje samo moment govorimo o čistom savijanju.



Slika 1: Nosač opterećen na savijanje

Ako dani nosač presječemo na udaljenosti x od lijevog oslonca razmatranjem krajnjeg presjeka lijevog elementa uočavamo pojavu unutarnje poprečne sile T_z i

unutarnjeg momenta savijanja M_y (sl. 2a). Sile u promatranom djelu nosača moraju biti uravnotežene s vanjskim silama koje djeluju na njega. Iz uvjeta ravnoteže lijevog dijela nosača slijedi:

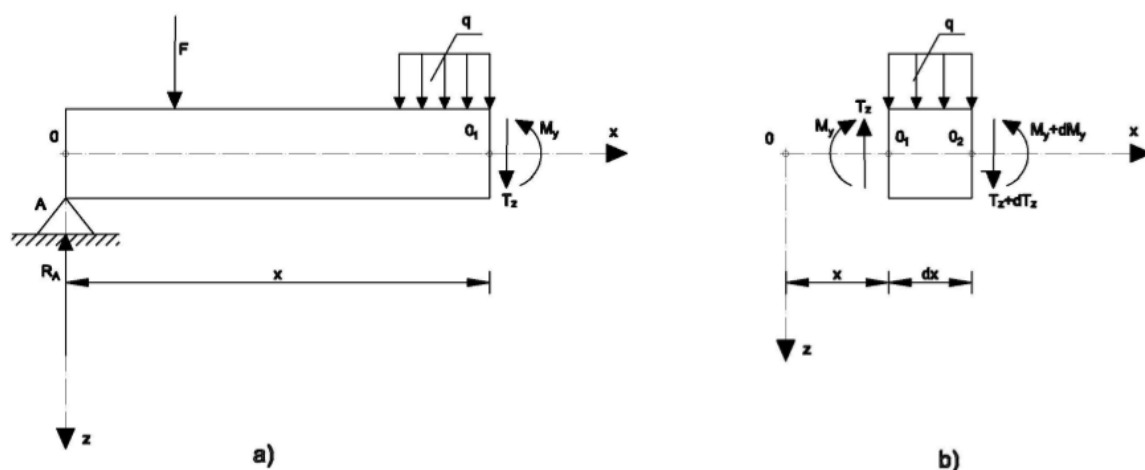
$$\Sigma F_Z = 0; \quad R_A - F - q(x - l_2) - T_Z = 0;$$

$$T_Z = R_A - F - q(x - l_2) = \Sigma F_Z$$

$$\Sigma M_{O_1} = 0; \quad R_A x - F(x - l_1) - q \frac{(x - l_1)^2}{2} - M_y = 0;$$

$$M_y = R_A x - F(x - l_1) - q \frac{(x - l_1)^2}{2} = \Sigma M_{O_1}$$

Iz ovoga vidimo da su veličine T_Z i M_y jednake algebarskoj sumi vertikalnih sila, odnosno momenata savijanja koji djeluju na promatrani dio nosača. T_Z i M_y se mijenjaju u ovisnosti od x , tj. ovisno o tome koji je poprečni presjek razmatran. Ako ove veličine nanesimo u mjerilu na os štapa dobivamo dijagram poprečnih sila T (sl. 1b) i dijagram momenata savijanja M (sl. 1c).



Slika 2: Element lijevo od presjeka O_1 i izrezani element duljine dx

Poprečnu silu definiramo kao pozitivnu ako je usmjerena u pozitivnom smjeru osi y ili z dok je normala promatranog presjeka usmjerena u pozitivnom smjeru x osi. Također, momente koji djeluju oko osi y ili z definiramo kao pozitivne ako djeluju u

smjeru suprotnom kazaljke na satu dok je normala promatranog presjeka usmjerena u pozitivnom smjeru x osi. No to se može pojednostaviti na način da poprečnu silu definiramo kao pozitivnu ako vrti promatrani element u smjeru kazaljke na satu i moment kao pozitivan ako promatrani element savija konkavno prema dolje (sl. 2b).

Promotrimo element nosača između točaka 0_1 i 0_2 (sl. 2b). Element je uravnotežen vanjskim opterećenjem i unutarnjim poprečnim silama i momentima. Promatranjem dijagrama unutarnjih sila vidljivo je da poprečna sila i moment nisu jednaki s obje strane elementa već da postoji promjena u vrijednosti ovisna o duljini. U presjeku 0_1 djeluju poprečna sila $T_z(x)$ i moment $M_y(x)$, a u presjeku 0_2 poprečna sila $T_z(x) + dT_z(x)$ i moment $M_y(x) + dM_y(x)$. Iz uvjeta ravnoteže slijedi:

$$\Sigma F_z = -T_z + (T_z + dT_z) + q dx = 0$$

$$\Sigma M_{0_2} = M_y + T_z dx - q dx \frac{dx}{2} - (M_y + dM_y) = 0$$

Nakon sređivanja iz prvog uvjeta dobivamo:

$$\frac{dT_z}{dx} = -q \quad (1)$$

A iz drugog uvjeta dobivamo:

$$T_z dx - q dx \frac{dx}{2} - dM_y = 0$$

Član $q dx \frac{dx}{2}$ je mala veličina drugog reda i stoga ga zanemarujemo. Iz toga slijedi:

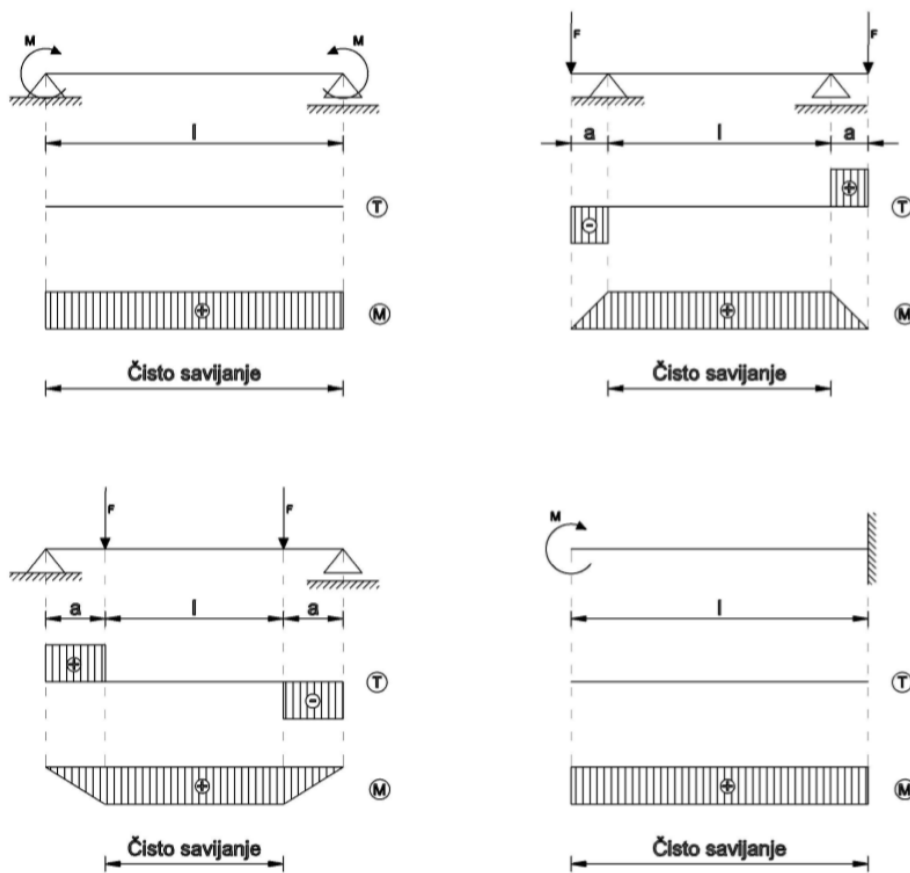
$$\frac{dM_y}{dx} = T_z \quad (2)$$

Kada izraz (2) deriviramo po x i uvrstimo izraz (1) dobijemo:

$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} = -q \quad (3)$$

Ove tri jednadžbe nazivamo *diferencijalnim zavisnostima pri savijanju* [1]. One nam daju odnose funkcija kontinuiranog opterećenja, dijagrama poprečnih sila i dijagrama momenta savijanja. Iz izraza (2) vidimo da se ekstremna vrijednost momenta M_y pojavljuje u točki gdje je $T_z = 0$.

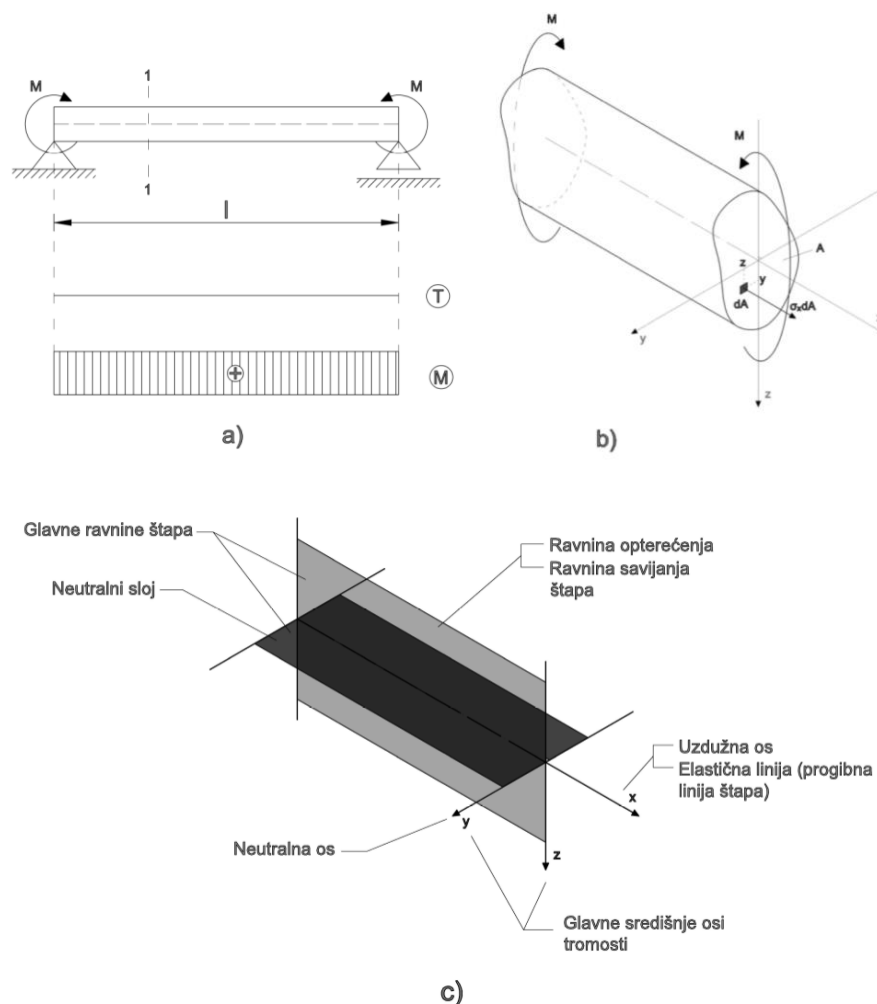
Kao što je prije navedeno savijanje poprečnim silama i čisto savijanje razlikujemo ovisno o tome jeli savijanje rezultat djelovanja poprečnih sila. To je slučaj u primjeru sa slike 1. Na slici 3 prikazano je nekoliko najčešćih slučajeva čistog savijanja. Niti jedan sustav sa ilustracije nije opterećen kontinuiranim opterećenjem i stoga postoje zone unutar nosača gdje se ne pojavljuju unutarnje posmične sile. Iz izraza (2) je očito da ako je T_z na nekoj duljini l konstantno jednak nula, tada je na toj istoj duljini l M_y također konstantan te maksimalan (sl. 3).



Slika 3: Sustavi pod djelovanjem čistog savijanja

2.2 Čisto savijanje

Na slici 4a prikazan je sustav proste grede opterećene koncentriranim momentima na krajevima gdje je štap konstantnog poprečnog presjeka izrađen od homogenog, izotropnog i elastičnog materijala.



Slika 4: Štap opterećen koncentriranim momentima

Štap je presječen u presjeku 1 – 1 te je njegov lijevi segment izoliran (sl. 4b). Na mjestu presjeka pojavljuju se unutarnji moment savijanja i unutarnja uzdužna sila. Koordinatni sustav je postavljen na način da je os x normala poprečnog presjeka, os y je uzeta proizvoljno po visini presjeka, no okomita je na os x i os z , a os z je presječnica ravnine poprečnog presjeka i ravnine opterećenja. S jedne strane elementa djeluje vanjsko opterećenje u obliku koncentriranog momenta, a iz uvjeta ravnoteže izvodimo unutarnje sile. U ravnini poprečnog presjeka promatramo

element površine dA . Naprezanje definiramo kao silu koja djeluje na nekoj površini, temeljem toga silu uvrštavamo kao umnožak naprezanja i površine, u ovom slučaju dA , stoga su unutarnje sile izražene kao produkti $\sigma_x dA$, $\tau_{xy} dA$ i $\tau_{xz} dA$. Kod tangencijalnih naprezanja τ_{xy} i τ_{xz} prvi indeks označava smjer normale površine poprečnog presjeka u kojoj djeluju naprezanja, a drugi indeks smjer naprezanja. Kod normalnog naprezanja σ_x smjer normale površine poprečnog presjeka i smjer naprezanja su jednaki te stoga ono ima samo jedan indeks. Konačno, za dani element u tri dimenzije možemo postaviti šest uvjeta ravnoteže:

$$\begin{aligned}
 \Sigma F_x &= 0; & N &= \int_A \sigma_x dA = 0 \\
 \Sigma F_y &= 0; & T_y &= \int_A \tau_{xy} dA = 0 \\
 \Sigma F_z &= 0; & T_z &= \int_A \tau_{xz} dA = 0 \\
 \Sigma M_x &= 0; & M_x = M_t &= \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA = 0 \\
 \Sigma M_y &= 0; & M_y = M_s &= \int_A \sigma_x z dA = M \\
 \Sigma M_z &= 0; & M_z &= \int_A \sigma_x y dA = 0
 \end{aligned} \tag{4}$$

Od unutarnjih sila u presjeku pojavljuje se samo moment savijanja. Vrijednosti sila M_t , T_y i T_z jednake su nuli, stoga nema posmičnih naprezanja. Posljedica toga je da svi elementi nosača mijenjaju svoju veličini, tj. skraćuju se ili produljuju, ali njihov oblik ostaje isti (sl. 5). Uz to na površini dA djeluje samo unutarnja sila $\sigma_x dA$ i stoga nam ostaju samo tri jednadžbe ravnoteže:

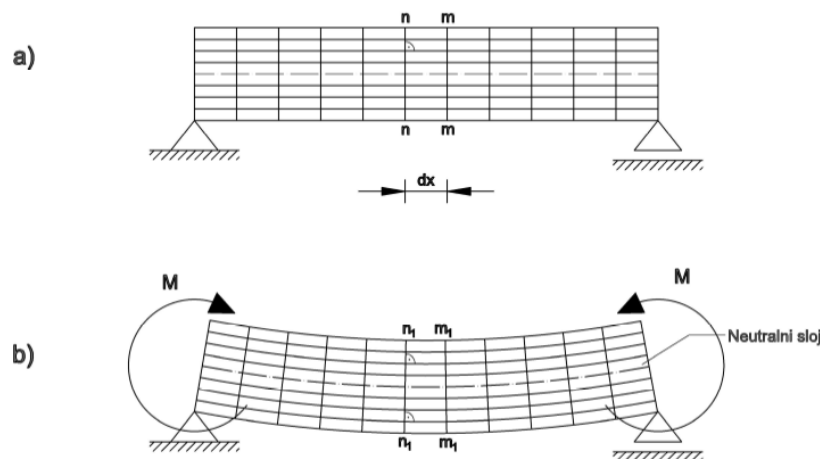
$$\int_A \sigma_x dA = 0 \tag{5a}$$

$$\int_A \sigma_x z dA = M \tag{5b}$$

$$\int_A \sigma_x y dA = 0 \tag{5c}$$

Pošto nam tri jednadžbe ravnoteže nisu dovoljne za određivanje nepoznanica potrebno je promotriti deformaciju nosača. Moment savijanja je konstantan po duljini cijelog nosača što znači da je i zakrivljenost elastične linije konstantna. To znači da elastična linija nosača čini funkciju kružnog luka. Bernoulijeva hipoteza ravnih poprečnih presjeka kaže *da ravni presjeci izvedeni u mislima prije deformacije ostaju*

ravni i nakon deformacije [1]. To možemo prikazati presijecanjem savijenog nosača po srednjem presjeku, koji je ravan i okomit na os nosača. Nastavimo li polovice nosača presijecati u srednjem presjeku uočiti ćemo da je svaki presjek uvijek ravan i okomit na elastičnu liniju nosača. Crtanjem mreže na deformirani nosač uočavamo kako svaka ćelija mijenja svoju veličinu (skraćuje se ili produljuje) no njen oblik ostaje isti, tj. horizontalne i vertikalne linije ostaju okomite (sl. 5). Ona linija čija duljina ostaje jednaka duljini nedeformiranog nosača čini duljinu neutralnog sloja čija se širina b nalazi u ravnini poprečnog presjeka. Linija presječnica neutralnog sloja i ravnine poprečnog presjeka nazivamo neutralnom osi presjeka (sl. 4c).

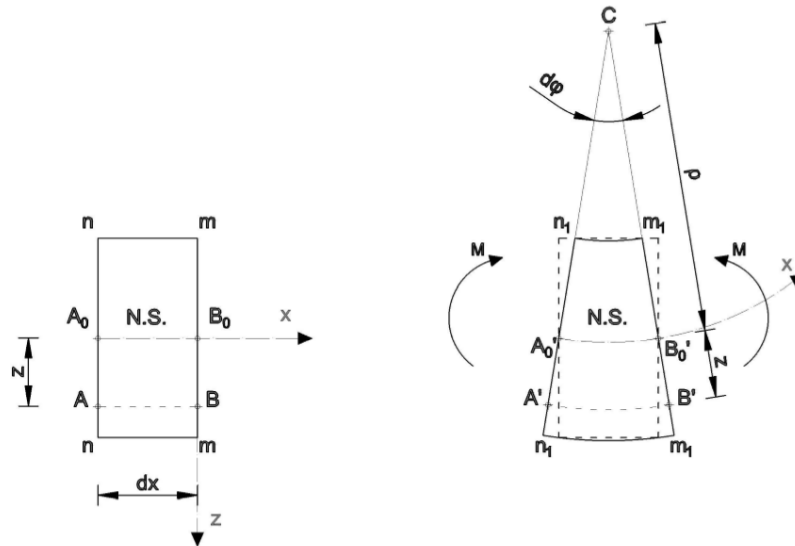


Slika 5: Deformacija elemenata mreže nosača pri opterećenju

Iz jednadžbi (5) proizlazi da je vanjsko opterećenje momentom na elementu štapa uravnoteženo spregom unutarnjih sila. U neutralnom sloju normalna naprezanja su $\sigma_x = 0$, naprezanja na strani koja se skraćuje su negativnog, a na strani koja se produljuje pozitivnog predznaka. Upravo ta pozitivna i negativna naprezanja umnožena površinom presjeka na kojem djeluju tvore uravnotežujući spreg sila. Na slici 4b os y postavljena je na mjesto neutralne osi presjeka, što znači da se na površini iznad nje pojavljuju negativna, a ispod pozitivna naprezanja.

Promotrimo sustav sa slike 5 te izdvojimo iz njega element između presjeka $n - n$ i $m - m$ duljine dx . Na slici 6 prikazan je izdvojeni element prije opterećenja i

njegov deformirani oblik. Nakon deformiranja presjeci $n - n$ i $m - m$ ostaju ravni, no međusobno se otklanjaju za kut $d\varphi$. Vlakno A_0B_0 postaje $A_0'B_0'$ jednake duljine, no iz pravca se pretvara u kružni luk polumjera ρ . Vlakno AB postaje $A'B'$ i ono se produljuje zbog usmjerenja djelovanja momenata te se također transformira u kružni luk polumjera $\rho + z$.



Slika 6: Izrezani element iz sustava sa slike 5

Produljenje vlakna AB na udaljenosti z od neutralnog sloja u smjeru x osi iznosi:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}}$$

Duljina vlakna prije deformacije jednaka je $\overline{AB} = \overline{A_0B_0} = dx = \overline{A_0'B_0'} = \rho d\varphi$, a duljina nakon deformacije iznosi $\overline{A'B'} = (\rho + z)d\varphi$. Iz toga slijedi:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{(\rho + z)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi}$$

Sređivanjem izraza dobijemo:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{z}{\rho} \quad (6)$$

Iz ovog izraza zaključujemo da je veličina deformacije proporcionalna udaljenosti razmatranog sloja vlakana od neutralnog sloja i da će deformacija biti najveća na

krajnjim vlaknima, tj. za udaljenost od neutralne osi z_{max} . Između krajnjih vlakana deformacije se raspodjeljuju po linearnom zakonu i u neutralnom sloju mijenjaju predznak. Deformacije su konstantne po širini poprečnog presjeka b (sl. 7).

Naprezanja i deformacije u ostalim smjerovima na razmatramo jer su sva vlakna pri čistom savijanju u stanju jednoosnog naprezanja i jednoosnih deformacija. Odnos između naprezanja i deformacija izražavamo Hookeovim zakonom za jednoosno stanje naprezanja:

$$\sigma_x = \varepsilon_{xx} E \quad (7)$$

Ako u ovaj izraz uvrstimo izraz (6) dobivamo:

$$\sigma_x = \frac{E}{\rho} z \quad (8)$$

Normalna naprezanja su konstantna po širini poprečnog presjeka i linearno se mijenjaju po visini poprečnog presjeka s maksimalnim vrijednostima u krajnjim vlaknima (sl. 7). Uvrštavanjem izraza (8) u izraz (5a) dobivamo:

$$\int_A \frac{E}{\rho} z \, dA = 0$$

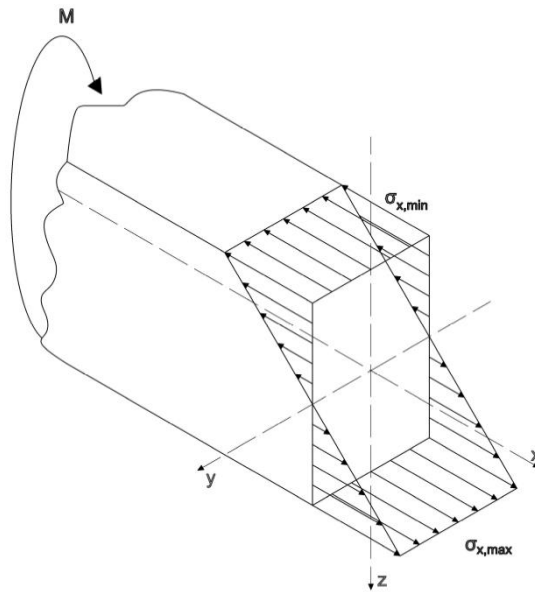
Modul elastičnosti i polumjer zakrivljenosti stavljamo ispred integrala jer su konstantni:

$$\frac{E}{\rho} \int_A z \, dA = 0$$

$\frac{E}{\rho} \neq 0$, što znači da je:

$$\int_A z \, dA = 0 \quad (9)$$

Ovaj integral je jednak statičkom momentu presjeka s obzirom na neutralnu os y S_y . Kada je statički moment $S_y = 0$ neutralna os y prolazi težištem presjeka, o čemu će biti više riječi u sljedećem poglavlju. Također, os z definirana je kao dio ravnine opterećenja koja prolazi kroz os štapa, što znači da sjecište osi z i y označuje težište presjeka T , a os x je uzdužna os štapa (sl. 4c).



Slika 7: Raspodjela naprezanja u presjeku

Ako u jednadžbu (5c) uvrstimo izraz (8) dobivamo:

$$\frac{E}{\rho} \int_A z y \, dA = 0$$

$\frac{E}{\rho} \neq 0$, što znači da je:

$$\int_A z y \, dA = 0 \quad (10)$$

Ovaj integral jednak je centrifugalnom momentu tromosti I_{zy} . Pošto je $I_{zy} = 0$ zaključujemo kako su osi y i z glavne središnje osi poprečnog presjeka i moment savijanja djeluje u ravnini koja prolazi jednom od glavnih središnjih osi tromosti. Tu ravninu nazivamo ravnina opterećenja i u ovom primjeru to je ravnina $x - z$. Također je očito da se neutralna os presjeka podudara s drugom glavnom središnjom osi tromosti. Glavne ravnine štapa definiramo kao ravnine koje sadrže središnje glavne osi tromosti i uzdužnu os štapa. Ako ravnina opterećenja jedna od glavnih ravnina štapa tada je ujedno i ravnina savijanja, a druga glavna ravnina štapa je neutralni sloj (sl. 4c).

Ako u jednadžbu (5b) uvrstimo izraz (8) za σ_x , nakon uređivanja slijedi:

$$\frac{E}{\rho} \int_A z^2 dA = M$$

Integral $\int_A z^2 dA = I_y$ predstavlja aksijalni moment tromosti s obzirom na neutralnu os y , tako da dobivamo:

$$\frac{E}{\rho} I_y = M$$

Odnosno:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_y} \quad (11)$$

Gdje $1/\rho$ predstavlja zakrivljenost neutralnog sloja štapa.

Kako je uzdužna os štapa skup težišta svih poprečnih presjeka, a ujedno i presječna ravnina savijanja i neutralnog sloja nazivamo je elastičnom linijom ili progibnom linijom štapa. Izvedeni izraz (11) predstavlja zakrivljenost elastične linije pri datom opterećenju M i savojnoj (fleksijskoj) krutosti EI_y . Savojna krutost ima dimenziju Nm^2 . Nadalje, isti izraz predstavlja Hookeov zakon pri savijanju jer daje vezu deformacije i opterećenja.

Ako je dani sustav opterećen čistim savijanjem, konstantnog je poprečnog presjeka i homogenog materijala moment savijanja i savojna krutost su konstantni te iz izraza (11) slijedi:

$$\rho = \frac{EI_y}{M} \quad (12)$$

ρ predstavlja polumjer kružnog luka koji je jedina krivulja konstantne zakrivljenosti.

Ako uvrstimo izraz (11) u izraz (8) dobivamo:

$$\sigma_x = \frac{M}{I_y} z \quad (13)$$

Tim izrazom imamo mogućnost odrediti veličinu normalnog naprezanja na bilo kojoj visini z poprečnog presjeka. Maksimalna naprezanja pojavljuju za maksimalnu vrijednost z_{max} , tj. u krajnjim vlaknima poprečnog presjeka. Na neutralnoj osi normalno naprezanje iznosi $\sigma_x = 0$.

Ako je sustav horizontalno simetričan s obzirom na neutralan sloj udaljenost vlakna od neutralne osi izražavamo kao $z = \pm \frac{h}{2}$. Iz toga slijedi:

$$\sigma_{x,max} = \frac{M}{I_y} \frac{h}{2}$$

$$\sigma_{x,min} = -\frac{M}{I_y} \frac{h}{2}$$

Pošto je $\frac{I_y}{\frac{h}{2}} = W_y$ aksijalni moment otpora s obzirom na os y gornji izraz je jednak:

$$\sigma_{x,max} = \frac{M}{W_y} \quad \text{i} \quad \sigma_{x,min} = -\frac{M}{W_y} \quad (14)$$

Raspodjela naprezanja u poprečnom presjeku ne ovisi o njegovu obliku, odnosno maksimalno i minimalno naprezanje uvijek su na krajnjim vlaknima i iznose nula u težištu presjeka.

Na slici 8 prikazana su dva krajnja poprečna presjeka nosača razmaknuta za udaljenost l koji se međusobno zaokreću za:

$$d\varphi = \frac{dx}{\rho}$$

Ako u to uvrstimo izraz (11) dobivamo:

$$d\varphi = \frac{M dx}{EI_y} \quad (15)$$

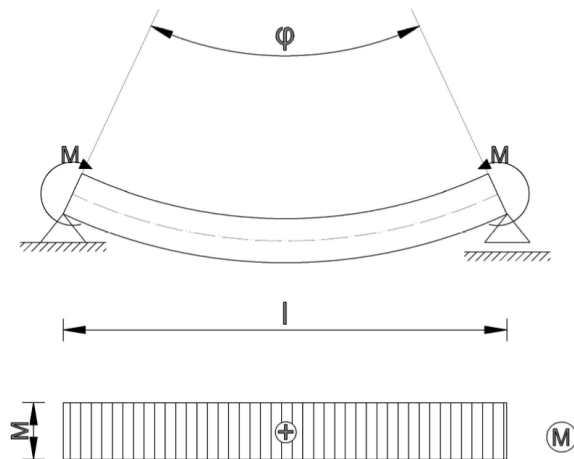
Ako izraz (15) integriramo dobivamo kut zaokreta krajnjih presjeka nosača:

$$\varphi = \int_0^l \frac{M dx}{EI_y} \quad (16)$$

Pošto su moment i savojna krutost konstantni duž nosača pri čistom savijanju kut zaokreta iznosi:

$$\varphi = \frac{Ml}{EI_y} \quad (17)$$

Iz ovog izraza vidimo da je kut zaokreta jednak površini momentnog dijagrama podijeljenog savojnom krutošću nosača. Raspodjela naprezanja nije ista kroz cijeli nosač i značajno se mijenja kod krajnjih presjeka, no zbog St. Venantovog principa njih možemo zanemariti iz razmatranja [1].



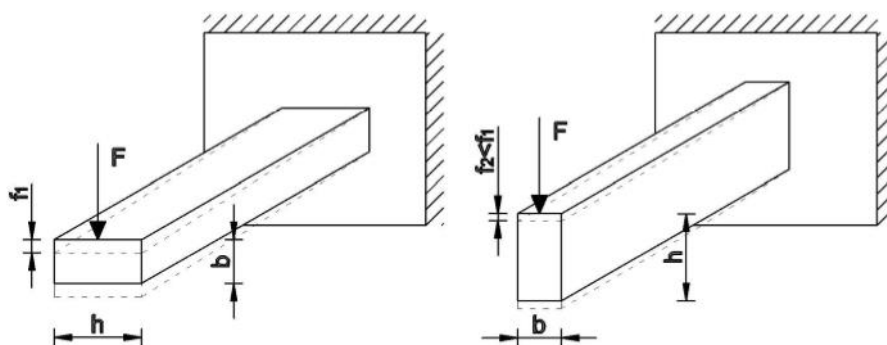
Slika 8: Zakret krajnjih presjeka nosača

3 GEOMETRIJSKE KARAKTERISTIKE PRESJEKA

3.1 O geometrijskim karakteristikama presjeka

U prethodnom poglavlju spomenuli smo neke geometrijske karakteristike poprečnog presjeka, statički moment, aksijalni moment tromosti (inercije) i centrifugalni moment tromosti. Ovo poglavlje detaljnije obrađuje temu karakteristika poprečnih presjeka.

Za razliku od aksijalno opterećenih štapova vidimo da na savijanje ne utječe samo površina poprečnog presjeka štapa već i njegov oblik i položaj. Na slici 9 prikazana su dva štapa, jednake površine poprečnog presjeka A , ali drugačije orijentacije koji će se deformirati drugačije. Prikazani presjek ima odnos $b/h = 2/1$. Progib grede je veći kada je presjek orijentiran tako da mu je duža strana horizontalna.

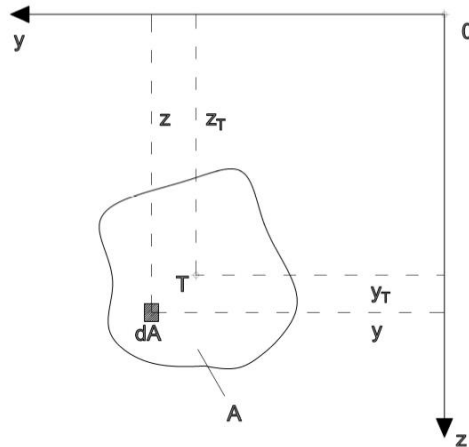


Slika 9: Utjecaj orijentacije presjeka na progib

Pod karakteristike poprečnih presjeka svrstavamo njihovu površinu, težište, statičke momente, momente tromosti i momente otpora.

3.2 Statički moment

Na slici 10 prikazan je proizvoljni poprečni presjek površine A na kojoj je izdvojen segment površine dA u $z - y$ koordinatnom sustavu. Težište presjeka je označeno točkom T i koordinatama z_T i y_T .



Slika 10: Statički moment tromosti presjeka

Statičke momente tromosti presjeka s obzirom na osi z i y definiramo kao:

$$S_z = \int_A y \, dA \quad S_y = \int_A z \, dA \quad (18)$$

Statički moment ima dimenziju $[L^3]$, te ih možemo izraziti na način:

$$S_z = A y_T \quad S_y = A z_T \quad (19)$$

Za poznatu površinu presjeka i udaljenost težišta od razmatrane osi statički moment jednak je njihovom umnošku. Ako se težište presjeka nalazi na osi koordinatnog sustava tada je statički moment tromosti s obzirom na tu os jednak nuli.

3.3 Moment tromosti (inercije)

Momente tromosti dijelimo na aksijalne, centrifugalne (devijacijske) i polarne momente tromosti odnosno inercije. Polarni momenti tromosti neće biti razmatrani jer nam nisu potrebni za analizu savijanja.

Promotrimo ponovo sliku 10. Aksijalne momente tromosti (inercije) za dani presjek definiramo integralima:

$$I_z = \int_A y^2 dA \quad I_y = \int_A z^2 dA \quad (20)$$

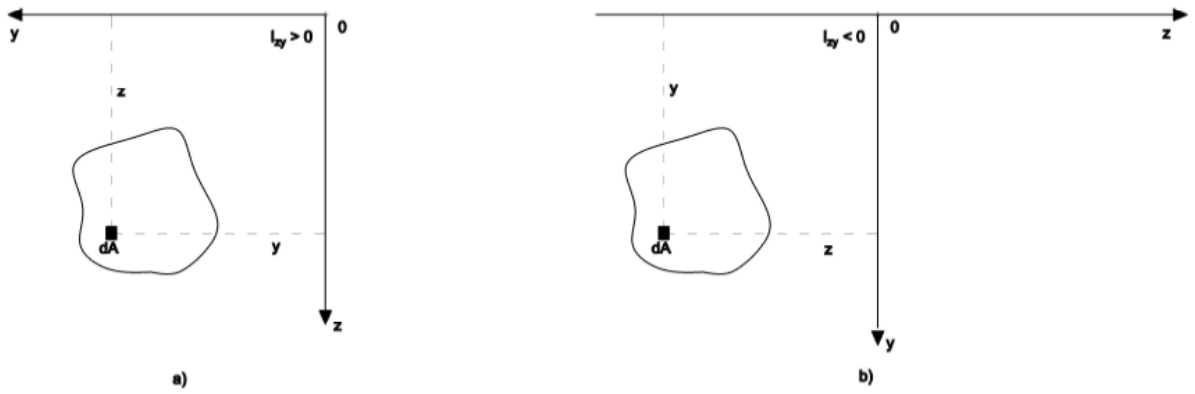
Vidimo da su aksijalni momenti tromosti umnožak površine poprečnog presjeka i kvadrata udaljenosti težišta presjeka od promatrane osi.

Centrifugalni (devijacijski) moment tromosti (inercije) definiramo integralom:

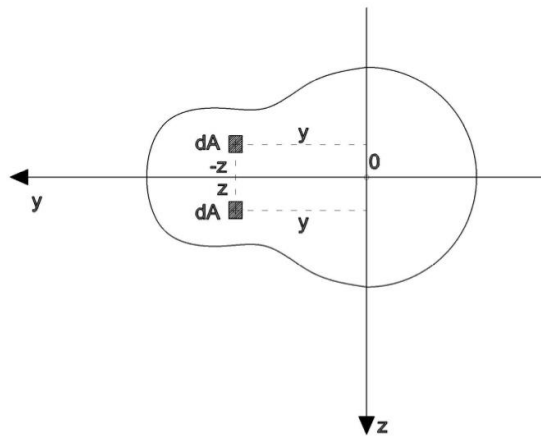
$$I_{zy} = \int_A z y dA \quad (21)$$

Centrifugalni (devijacijski) moment tromosti (inercije) umnožak je površine presjeka i udaljenosti njegova težišta od obje osi. Aksijalni i centrifugalni momenti tromosti imaju dimenziju [L⁴]

Kada razmatramo predznake geometrijskih karakteristika zaključujemo da oni ovise isključivo o orijentaciji presjeka u odnosu na koordinatni sustav. Aksijalni moment tromosti uvijek je pozitivan jer su koordinate presjeka izražene drugom potencijom, dok centrifugalni moment tromosti može biti pozitivan, negativan ili jednak nuli što ovisi o položaju koordinatnog presjeka. Na slici 11 vidimo da je u slučaju a) centrifugalni moment pozitivan, no ako koordinatni sustav zarotiramo za 90° on će biti negativan, a ako je barem jedna os koordinatnog sustava os simetrije presjeka centrifugalni moment biti će jednak nuli. Na slici 12 prikazan je presjek kojemu je os y os simetrije, u tom slučaju udaljenost težišta od osi y biti će nula, a time i $I_{zy} = 0$.



Slika 11: Predznak momenata tromosti ovisno o rotaciji koordinatnog sustava



Slika 12: Simetrija presjeka ovisno o osi y

Kod presjeka složenih oblika površinu možemo podijeliti u više segmenata:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n$$

Na isti način možemo sumirati integrale momenata tromosti:

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{A_1} y^2 dA + \int_{A_2} y^2 dA + \int_{A_3} y^2 dA + \dots + \int_{A_n} y^2 dA$$

$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_{A_1} z^2 dA + \int_{A_2} z^2 dA + \int_{A_3} z^2 dA + \dots + \int_{A_n} z^2 dA$$

$$I_{zy} = \int_A z y \, dA = \int_{A_1} z y \, dA + \int_{A_2} z y \, dA + \int_{A_3} z y \, dA + \dots + \int_{A_n} z y \, dA$$

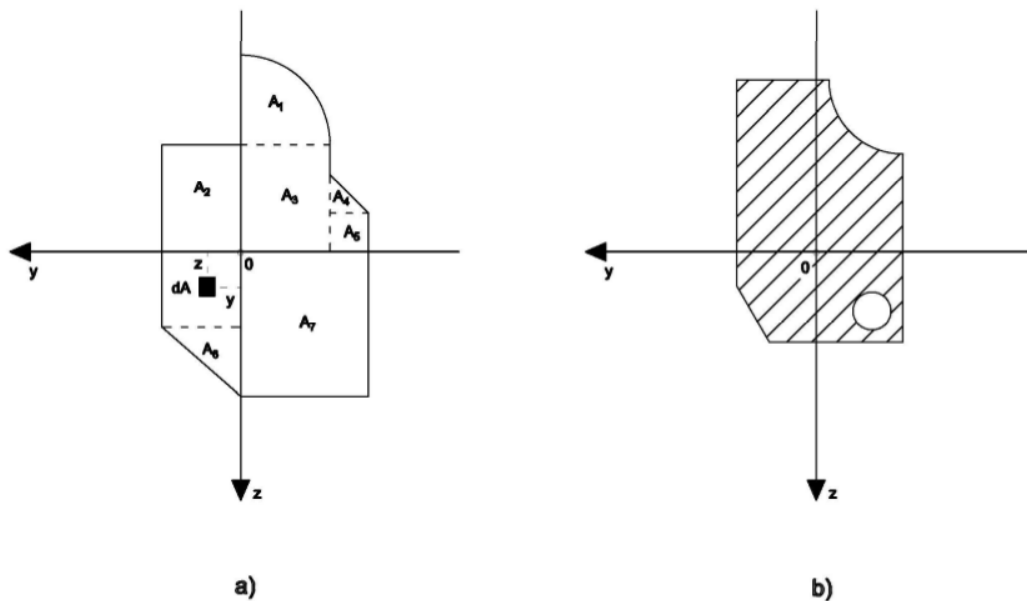
Nadalje, prijašnje izraze možemo zapisati kao:

$$I_z = I_{z,1} + I_{z,2} + I_{z,3} + \dots + I_{z,n} = \sum_{i=1}^n I_{z,i}$$

$$I_y = I_{y,1} + I_{y,2} + I_{y,3} + \dots + I_{y,n} = \sum_{i=1}^n I_{y,i} \quad (22)$$

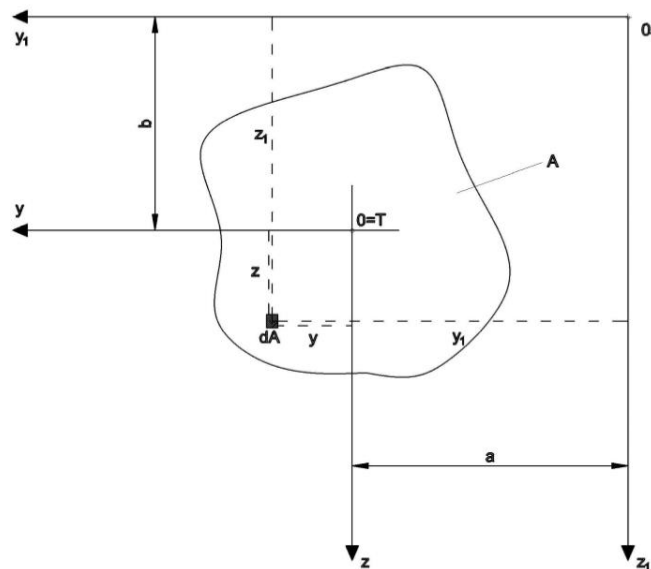
$$I_{zy} = I_{zy,1} + I_{zy,2} + I_{zy,3} + \dots + I_{zy,n} = \sum_{i=1}^n I_{zy,i}$$

Kod složenih presjeka možemo algebarski sumirati momente tromosti manjih površina presjeka. Na isti način možemo izračunati momente tromosti u oslabljenim presjecima oduzimanjem momenta tromosti manjih površina (sl. 13).



Slika 13: Suma ili razlika momenata tromosti segmenata presjeka

Momenti tromosti ovise o položaju presjeka u odnosu na koordinatni sustav, zaključujemo da se promjenom koordinatnog sustava mijenja i veličina momenta tromosti. Na slici 14 prikazan je poprečni presjek s koordinatnim sustavom u svom težištu i transliranim koordinatnim sustav čije su osi paralelne osima prvobitnom sustavu.



Slika 14: Moment tromosti s obzirom na paralelni koordinatni sustav

Za koordinatni sustav $z - y$ koji ima središte u težištu poprečnog presjeka znamo momente tromosti:

$$I_z = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A z^2 dA \quad (23)$$

$$I_{zy} = \int_A z y dA$$

Momente tromosti s obzirom na koordinatni sustav $z_1 - y_1$ definiramo kao:

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA$$

$$I_{y_1} = \int_A z_1^2 dA \quad (24)$$

$$I_{z_1 y_1} = \int_A z_1 y_1 dA$$

Nadalje, udaljenosti težišta od drugog koordinatnog sustava izražavamo kao:

$$z_1 = z + b \quad y_1 = y + a \quad (25)$$

Ako izraze (25) uvrstimo u izraze (24) dobivamo:

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y + a)^2 dA = \int_A y^2 dA + a^2 \int_A dA + 2a \int_A y dA$$

$$I_{y_1} = \int_A z_1^2 dA = \int_A (z + b)^2 dA = \int_A z^2 dA + b^2 \int_A dA + 2b \int_A z dA \quad (26)$$

$$I_{z_1 y_1} = \int_A z_1 y_1 dA = \int_A (z + b)(y + a) dA = \int_A z y dA + a b \int_A dA + a \int_A z dA + b \int_A y dA$$

Osi y i z prolaze kroz težište presjeka i stoga su integrali $S_z = \int_A y dA$ i $S_y = \int_A z dA$ jednaki nula. Uređivanjem izraza (26) dobivamo:

$$I_{z_1} = I_z + a^2 A \quad I_{y_1} = I_y + b^2 A \quad (27)$$

$$I_{z_1 y_1} = I_{zy} + a b A$$

Težište se nalazi u ishodištu koordinatnog sustava $z - y$ te stoga centrifugalni moment tromosti iznosi $I_{zy} = 0$. Centrifugalni moment za drugi sustav glasi:

$$I_{z_1 y_1} = a b A \quad (28)$$

Jednadžbama (27) i (28) izvedeno je Steinerovo pravilo za momente tromosti s obzirom na paralelne osi koje glasi:

Aksijalni moment tromosti presjeka s obzirom na zadanu os jednak je zbroju momenata tromosti s obzirom na paralelnu težišnu os i produkta površine presjeka i kvadrata udaljenosti zadane i težišne osi [1].

Steinerovo pravilo za centrifugalni moment tromosti glasi:

Centrifugalni moment tromosti presjeka s obzirom na zadani pravokutni koordinatni sustav jednak je zbroju centrifugalnog momenta tromosti s obzirom na paralelni težišni koordinatni sustav i produkata površine presjeka i koordinata težišta presjeka u zadanom pravokutnome koordinatnom sustavu [1].

U izvedenim jednadžbama prve članove s desne strane nazivamo vlastitim momentima tromosti jer su određeni s obzirom na koordinatni sustav s ishodištem u težištu presjeka, a druge članove položajnim momentima tromosti jer su ovisni o položaju novog koordinatnog sustava.

3.3.1 Pravokutni poprečni presjek

Promotrimo poprečni presjek pravokutnog oblika dimenzija $A = b h$ (sl. 15). Osi y i z su osi simetrije poprečnog presjeka te stoga i glavne središnje osi tromosti. Na presjeku je izdvojen segment površine $dA = b dz$ i uz njegovu pomoć izraziti ćemo aksijalni moment tromosti s obzirom na os y :

$$I_y = \int_A z^2 dA = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = 2b \int_0^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{bh^3}{12} \quad (29a)$$

Istim postupkom dobivamo:

$$I_z = \frac{hb^3}{12} \quad (29b)$$

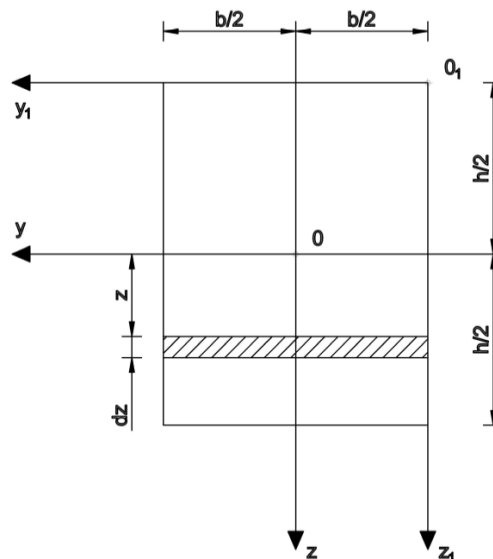
Pošto su osi y i z osi simetrije $I_{zy} = 0$. Primjenom Steinerova pravila izvodimo momente tromosti s obzirom na osi y_1 i z_1 :

$$I_{y_1} = I_y + \left(\frac{h}{2}\right)^2 A = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_{z_1} = I_z + \left(\frac{b}{2}\right)^2 A = \frac{hb^3}{12} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 bh = \frac{hb^3}{3}$$

(30)

$$I_{z_1y_1} = I_{zy} + \left(\frac{h}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)A = 0 + \left(\frac{h}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)bh = \frac{h^2b^2}{4}$$



Slika 15: Moment tromosti pravokutnog poprečnog presjeka

3.4 Momenti otpora

Aksijalni moment otpora s obzirom na promatranu glavnu središnju os je *koeficijent aksijalnog momenta tromosti s obzirom na zadanu os i najveće udaljenosti konture presjeka od zadane osi* [1]. Njime izražavamo odnos aksijalnog momenta tromosti i visine presjeka. Analitički ga izražavamo kao:

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} \quad (31)$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}}$$

Ako poprečni presjek nije horizontalno simetričan imamo dva momenta otpora, s dvije različite maksimalne udaljenosti konture presjeka od osi:

$$W_{y_1} = \frac{I_y}{z_{max,1}} \quad (32)$$

$$W_{y_2} = \frac{I_y}{z_{max,2}}$$

Za pravokutni presjek momenti otpora iznose:

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6} \quad (33)$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{\frac{hb^3}{12}}{\frac{b}{2}} = \frac{hb^2}{6}$$

4 SAVIJANJE U PRAKSI

4.1 Savijanje u realnim konstrukcijama

Problem savijanja je sveprisutan u građevinskoj struci. Nosače definiramo kao horizontalne elemente koji na sebe prihvaćaju vertikalna opterećenja. U građevinskoj praksi u širokoj uporabi su nosači od armiranog betona, čelika, drva i aluminija. Fleksijska krutost ovisna je o materijalu nosača, dijelom zbog Youngovog koeficijenta elastičnosti, a drugim djelom zbog oblika svoga poprečnog presjeka, koji uvelike ovisi o svojstvima i mogućnosti obrade materijala.

U praksi nosači preuzimaju opterećenje od međukatnih ploča, ne nosivih zidova koji se nalaze na njima i vertikalna opterećenja sa drugih greda, te mnoga druga. Prvo dvoje promatramo kao kontinuirana opterećenja oblika koji nam je najprikladniji traženoj svrsi, dok prijenos opterećenja s drugih greda aproksimiramo koncentriranim silama. Na slici 16 prikazana je armirano betonska greda pravokutnog poprečnog presjeka koja preuzima težinu stropne konstrukcije. Pravokutni poprečni presjeci najčešću su oblik presjeka kod AB greda zbog jednostavnosti izvedbe in situ, no kod prefabriciranih elemenata česti su poprečni presjeci I i T oblika. Ovakve grede imaju čeličnu armaturu u donjoj zoni s negativnim naprezanjima zbog male nosivosti betona na vlačna opterećena. Deformacija AB grede uzrokuje vertikalne pukotine u gredi koje započinju na krajnjim vlaknima i s naknadnim oslabljenjima šire se prema središtu grede istovremeno pomičući neutralnu os prema gore.

Na slici 17 prikazani su drveni nosači koji preuzimaju opterećenje stropne konstrukcije. Kod drvenih greda također je najčešći pravokutan poprečni presjek, no drvo se može tvornički oblikovati i u drugačije presjeke. Uz to, drvo je pogodan materijal za izradu ksloženih nosača kao što su I profili sa slike 17. Kod takvih presjeka potrebno je održati kontinuitet elemenata nosača mehaničkim vezama kao što su lijepljenje ili povezivanje štapastim vezilima ili moždanicima.



Slika 16: AB greda opterećena stropnom konstrukcijom [2]



Slika 17: Drvene grede opterećene stropnom konstrukcijom [3]

Na slici 18 također su prikazani složeni drveni nosači, no oni preuzimaju opterećenje stropne konstrukcije i prenose je na armirano betonsku gredu. Opterećenje stropne konstrukcije u izračunu promatramo kao kontinuirano opterećenje, a prijenos s drvenih nosača na AB gredu možemo aproksimirati koncentriranim silama.



Slika 18: Drvene grede prenose opterećenje na AB gredu [4]

Na slici 19 prikazana je prefabricirana armirano betonska greda I profila koja na sebe preuzima opterećenje čeličnih nosača sandučastog poprečnog presjeka u obliku koncentriranih sila.

Jedan od najčešćih primjera nosača kod masivnih konstrukcija su nadvoji nad otvorima u konstrukciji. Na slici 20 prikazan je betonski nadvoj koji premošćuje raspon otvora u zidanoj konstrukciji. Nadvoji u većini izvedbi imaju po dva oslonca i opterećeni su kontinuiranim opterećenjem.



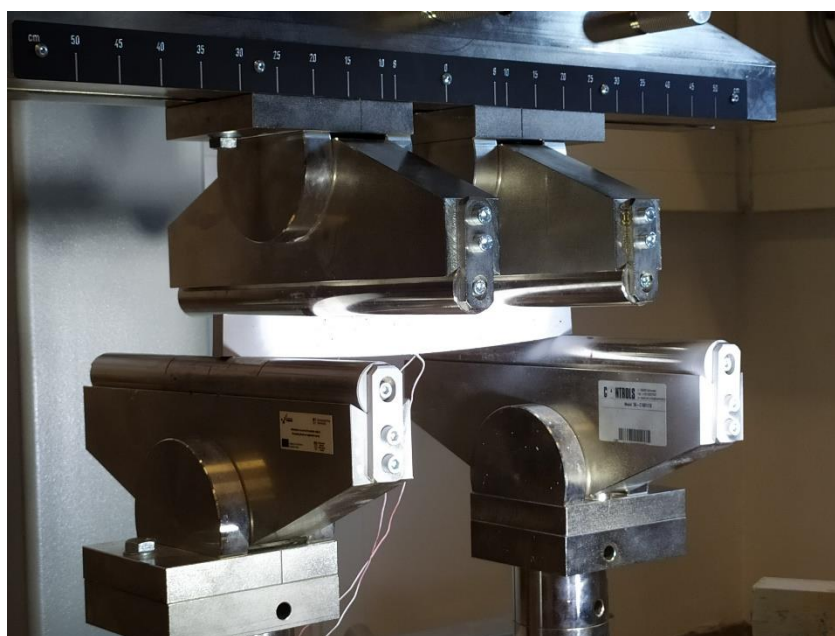
Slika 19: AB greda preuzima koncentrirana opterećenja čeličnih greda [5]



Slika 20: Betonski nadvoj u zidanoj konstrukciji [6]

4.2 Čisto savijanje

Čisto savijanje u praksi ne postoji jer kod proračuna nosača njegovu vlastitu težinu uzimamo kao kontinuirano opterećenje. No ono je vrlo korisno za laboratorijska istraživanja, gdje se primjenjuje u istraživanju svojstava materijala, ali i geometrijskih značajki presjeka nosača. U laboratorijskim istraživanjima čisto savijanje se najčešće postiže tzv. „Four-point load“ opterećenjem ili opterećenjem u 4 točke, odnosno simetrično oslonjenim nosačem na dva oslonca s opterećenjem dvije simetrične koncentrirane sile. Tim načinom oslanjanja postizemo konstantan moment savijanja između dvije vertikalne sile kojima smo opteretili nosač. Takvo opterećenje nanosimo hidrauličkom prešom (sl. 21.)



Slika 21: Nosač pod "Four-point load" opterećenjem

4.3 Odabir presjeka

Kod primjene nosača od materijala koji su elastoplastični pri odabiru poprečnog presjeka u razmatranje uzimamo presjeke kojima je neutralni sloj horizontalna os simetrije i time je njegovo težište u sredini presjeka s obzirom na njegovu visinu. Time nosač ima jednak koeficijent sigurnosti za krajnja vlakna opterećena tlakom i vlakom. Pri odabiru presjeka potrebno je težiti ekonomičnosti,

stoga tražimo presjek koji pri čim manjoj površini A ima čim veći moment otpora W_y tj. tražimo presjek koji će nosaču dati najveću krutost uz najmanji utrošak materijala. To je moguće odabirom geometrije presjeka koja većinu površine koncentrira na što većoj udaljenosti od osi y . Iz toga slijedi da je za sustav opterećen silama koje uzrokuju savijanje najoptimalniji presjek I oblika. Presjek H oblika je također racionalan, no udaljenost pojasa od osi y puno je izraženija kod I presjeka. Ekonomičnost presjeka izražavamo stupnjem iskorištenosti presjeka η , tj. odnosom momenta otpora odabranog presjeka i momenta otpora idealnog presjeka. Moment otpora idealnog presjeka izražavamo kao moment otpora presjeka koji se sastoji od dva pojasa na zadanoj udaljenosti od osi y ($z = \frac{h}{2}$).

Zamislimo pravokutni poprečni presjek dimenzija $h = 30$ cm, i $b = 10$ cm. Površina poprečnog presjeka iznosi 300 cm² (sl. 22a). Aksijalni moment pravokutnog presjeka je jednak:

$$I_{y,prav} = \frac{bh^3}{12} = \frac{10 * 30^3}{12} = 22500 \text{ cm}^4$$

A moment otpora:

$$W_{y,prav} = \frac{I_{y,prav}}{z_{max}} = \frac{22500}{\frac{30}{2}} = 1500 \text{ cm}^3$$

Idealni poprečni presjek iste površine imao bi aksijalni moment tromosti s obzirom na os y :

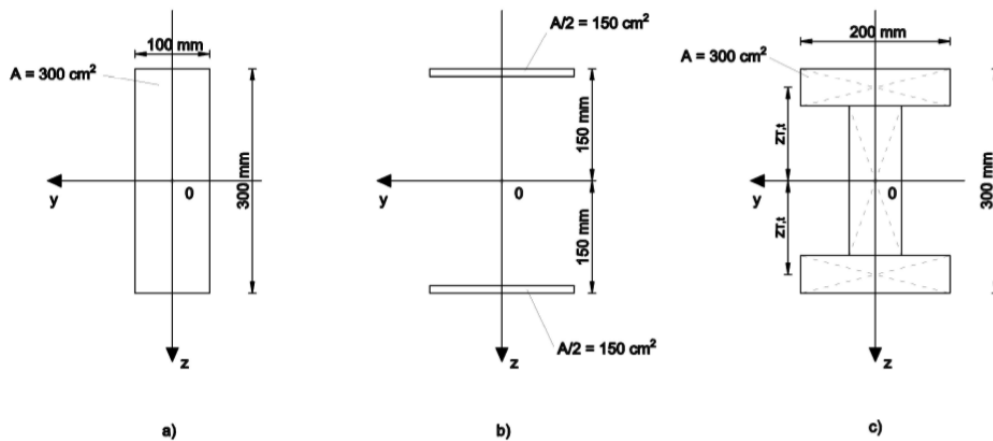
$$I_{y,id} = 2 \frac{A}{2} \left(\frac{h}{2}\right)^2 = 2 \frac{300}{2} \left(\frac{30}{2}\right)^2 = 67500 \text{ cm}^4$$

A njegov moment otpora s obzirom na os y iznosi:

$$W_{y,id} = \frac{I_{y,id}}{z_{max}} = \frac{67500}{\frac{30}{2}} = 4500 \text{ cm}^3$$

Sukladno tim vrijednostima za pravokutni poprečni presjek dobivamo stupanj iskorištenosti za površinu A:

$$\eta = \frac{W_{y,prav}}{W_{y,id}} = \frac{1500}{4500} = \frac{1}{3} = 0,33 = 33 \%$$



Slika 22: Moment otpora presjeka jednake površine

Nadalje, promotrimo poprečni presjek I profila površine $A = 300 \text{ cm}^2$. Radi pojednostavljenja hrbat i pojasnice jednakih su dimenzija, duljine 20 cm i debljine 5 cm. Time dobivamo presjek širok 20 cm i visok 30 cm. Aksijalni moment tromosti s obzirom na težište poprečnog presjeka iznosi:

$$I_{y,I} = \frac{b_w h_w^3}{12} + 2 \left(\frac{b_t h_t^3}{12} + A_t z_{T,t0}^2 \right) = \frac{5 \cdot 20^3}{12} + 2 * \left(\frac{20 \cdot 5^3}{12} + 20 * 5 * \left(\frac{20}{2} + \frac{5}{2} \right)^2 \right) = 35000 \text{ cm}^4$$

Uz pomoć Steinerovog pravila uvršteni su momenti tromosti za pojasnice. Komponenta težišta za gornju pojasnicu ima pozitivan predznak, a za donju negativan, no zbog druge potencije udaljenosti težišta od osi y obje su pozitivne tako da je radi pojednostavljenja računa izračunat moment tromosti jedne pojasnice i pomnožen sa dva. Moment tromosti iznosi:

$$W_{y,I} = \frac{I_{y,I}}{z_{max}} = \frac{35000}{\frac{30}{2}} = 2333,33 \text{ cm}^3$$

Vidimo da za proizvoljno odabrani poprečni presjek I oblika dobivamo stupanj iskorištenosti za istu površinu A :

$$\eta = \frac{W_{y,prav}}{W_{y,id}} = \frac{2333,33}{4500} = 0,52 = 52 \%$$

Očito je da je faktor iskorištenosti I profila veći od onoga za pravokutni poprečni presjek. Potrebno je naglasiti kako su dimenzije ovog I profila proizvoljno odabrane radi pojednostavljenja. U stvarnosti dimenzije rebra i pojasnica su standardizirane, te su u ovom proračunu izostavljena zaobljenja spojeva hrpta i pojasnica. Za presjeke I oblika standardiziranih dimenzija faktor iskorištenosti iznosi $\eta = 0,61 \sim 0,65$.

U nastavku slijedi usporedba presjeka I oblika i H oblika približno jednakih površina. Iako prividno izgledaju jednako, I profil ima znatno veću duljinu hrpta u odnosu na pojasnice te time povoljno utječe na moment otpora. Promotriti ćemo dva standardizirana profila približno jednakih površina. IPE 300 je I profil površine $A = 53,81 \text{ cm}^2$, visine $h = 300 \text{ mm}$ i širine $b = 150 \text{ mm}$. HEA 200 je H profil površine $A = 53,83 \text{ cm}^2$, visine $h = 190 \text{ mm}$ i širine $b = 200 \text{ mm}$. Oba profila su normirana prema Euronorm 19-57 / 53-62. Vrijednosti aksijalnih momenata tromosti očitane su tablično i iznose $I_y = 8356 \text{ cm}^4$ za IPE 300 i $I_y = 3692 \text{ cm}^4$ za HEA 200. Momenti otpora za presjeke iznose $W_y = 557,1 \text{ cm}^3$ za IPE 300 $W_y = 388,6 \text{ cm}^3$ za HEA 200. I profil s istim utroškom materijala ima 226 % veći aksijalni moment tromosti i 143 % veći moment otpora, čime je ekonomičniji za probleme savijanja.

5 PROBLEM HETEROGENIH NOSAČA

5.1 O heterogenim nosačima

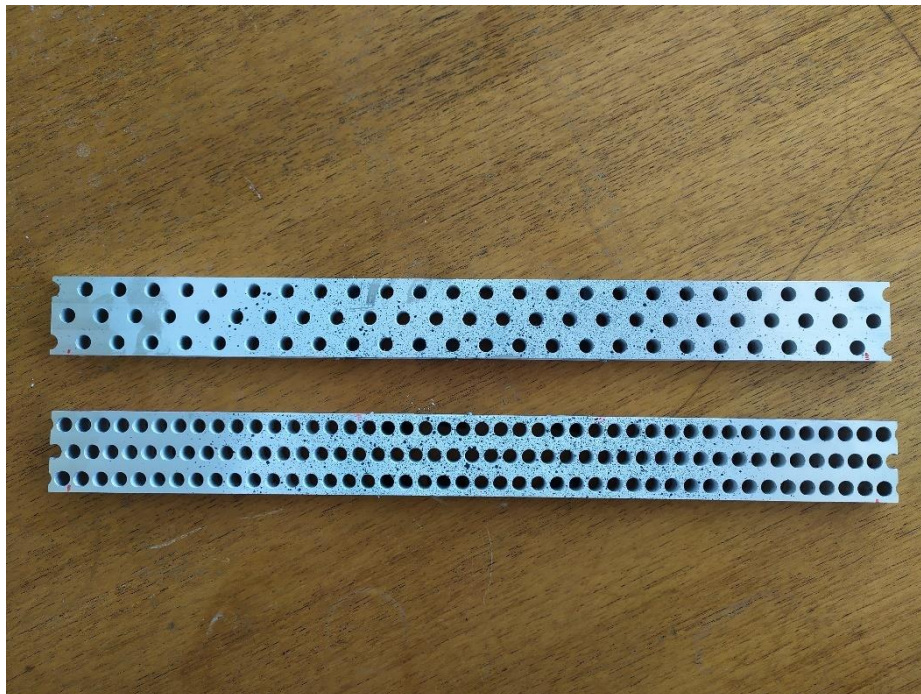
Heterogenim nosačem nazivamo nosač čija savojna krutost EI_y nije konstantna po cijeloj duljini nosača l . Razlog tome mogu biti promjena oblika ili dimenzija poprečnog presjeka ili kombinacija različitih materijala u nosaču. Ako je nosač sastavljen od više različitih materijala nazivamo ih kompozitnim nosačima. U većini slučajeva sastoje se od primarnog materijala koji zauzima većinu njegova volumena i materijala koji ga ojačava u pojedinim zonama. Kompozitni nosači mogu biti monolitni ako postoji mehanička veza između dvije faze odnosno dva različita materijala što rezultira pojavi dodatnih unutrašnjih sila. Dobar primjer monolitnih sastavljenih nosača je armirano betonska greda.

Razmotrimo AB gredu opterećenu čistim savijanjem s momentom pozitivnog predznaka. Kako smo vidjeli u analizi savijanja, pri pozitivnom momentu vlakna ispod neutralnog sloja se produljuju, a ona iznad neutralnog sloja se skraćuju. Mehanička svojstva betona kao krutog materijala nalažu da beton može prihvatiti velika tlačna naprezanja, ali dolazi do sloma materijala pri povećanim vlačnim napreznjima jer beton nije elastoplastičan materijal. Stoga čeličnu armaturu ugrađujemo u donju zonu nosača i njena uloga je preuzimanje vlačnih napreznja. Kod ovakvog oblika složenog nosača neutralni sloj se pomiče prema gore zbog promjenjive krutosti nosača po visini presjeka. Pri deformiranju pojavljuju se unutarne sile na spoju armature i betona.

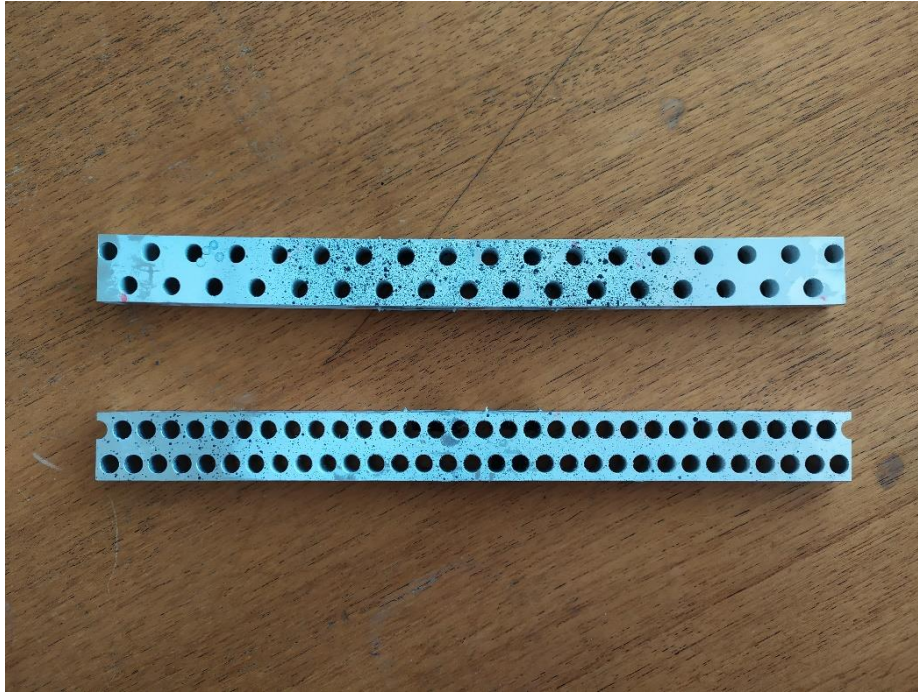
Na primjeru AB grede nosač je sastavljen od više materijala, no njegov poprečni presjek je konstantnih dimenzija ovisno o duljini nosača, samim time i njegova krutost. Nosaču s promjenjivim aksijalnim momentom tromosti I_y oblik ili dimenzije poprečnog presjeka mijenjaju se duž nosača.

5.2 Heterogeni nosači HMD i LMD strukture

U ostatku rada razmatrat će se aluminijski nosač pravokutnog poprečnog presjeka oslabljenog uklanjanjem dijela materijala u ravnini savijanja. Materijal je uklonjen u pravilnom rasporedu po duljini i visini nosača. Oslabljenja su napravljena bušenjem rupi kroz nosač paralelno s osi y . Oslabljenje će biti oblika valjka s bazama u ravninama paralelnim ravnini opterećenja i savijanja. Napravljene su dvije vrste uzoraka ovisno o tome koliko su nosači oslabljeni, nazvali smo ih HMD (High mass dencity, eng. Visoka koncentracija mase) i LMD (low mass dencity, eng. niska koncentracija mase). Nosači HMD i LMD strukture prikazani su na slikama 23 i 24. Također, kao kontrolne uzorke imamo pune nosače, analogno nazvane FM (Full mass, eng. Puna masa). Dimenzije i struktura nosača odabrani su na tako da budu istovjetni uzorcima korištenim u znanstvenom radu *The micropolar elastic behaviour of model macroscopically heterogeneous materials* autora A.J. Beveridgea, M.A. Wheela, D.H. Nasha [7].



Slika 23: Nosači HMD B3 i LMD B3



Slika 24: Nosači HMD B2 i LMD B2

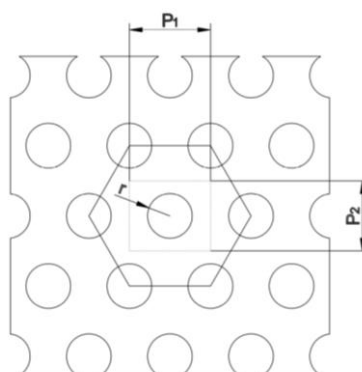
LMD nosači imaju gušći raspored oslabljenja od HMD nosača. Oko svakog oslabljenja definirali smo pravokutnu zonu koja je omeđena svojom širinom P_1 i visinom P_2 . Težište baze oslabljenja nalazi se u težištu pravokutne zone. Dimenzije P_1 i P_2 jednake su udaljenostima geometrijskih središta baza oslabljenja, P_1 u smjeru osi x i P_2 u smjeru osi z (sl. 25). Razlike u geometriji oslabljenja uzoraka HMD i LMD prikazani su tablicom 1. Testovi su provedeni na dvije veličine uzoraka, manjim uzorcima B2 i većim B3. Geometrija uzoraka prikazana je tablicom 2. Iz tablice 1 i tablice 2 vidimo kako je visina nosača B3 $h = 3 P_2$, a visina nosača B2 jednaka $h = 2 P_2$. Algebarska suma površina svih polja dimenzija $P_1 \times P_2$ daje površinu uzdužnog presjeka nosača. Time perforacije tvore heksagonalni oblik s jednom perforacijom u geometrijskom središtu heksagona (sl. 25).

Tablica 1: Geometrija oslabljenja nosača

Razina oslabljenja	r (mm)	P_1 (mm)	P_2 (mm)
HMD	3,5	16	12,7
LMD	3,5	9	12,7

Tablica 2: Geometrija nosača B2 i B3

Nosač	Visina presjeka h (mm)	Širina presjeka b (mm)	Duljina presjeka l (mm)
B2	25,4	12,7	280
B3	38,1	12,7	400

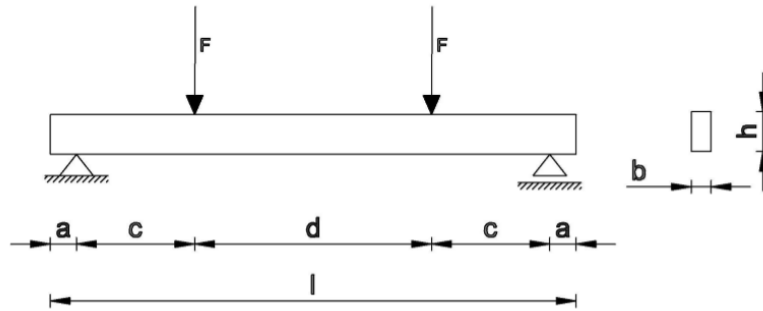


Slika 25: Struktura heterogenih nosača

Ovisno o svojoj visini nosač B2 ima dva reda oslabljenja, a nosač B3 tri reda. Zbog toga je nosač B3 horizontalno simetričan u uzdužnom presjeku, dok nosač B2 nije (sl. 23 i 24). To znači da će neutralna os u nedeformiranom stanju biti ravna linija za nosač B3, a za nosač B2 ona će biti krivulja. Isti je slučaj s neutralnim slojevima. Iz tog razloga analitička analiza biti će provedena samo za nosač B3, a laboratorijska mjerenja provedena su za oba nosača. Uz to, kod svih oslabljenja očekuje se pojava koncentracije naprezanja koja zbog svoje kompleksnosti neće biti razmatrana u ovom radu.

Uzorci nosača su opterećeni „four point load“ opterećenjem, što znači da su oslonjeni na dva oslonca te zatim opterećeni s dvije koncentrirane sile. Geometrija opterećenog nosača je prikazana na slici 26 s dimenzijama datim u tablici 3.

Pretpostavljamo da će veličina izmjerenih deformacija biti veća od onih analitički dobivenih radi koncentracije naprezanja oko oslabljenja, no ta razlika ne bi trebala biti značajna. Uz to, preciznost mjernih uređaja mjerenja nam neće omogućavati potpuno jednake rezultate.



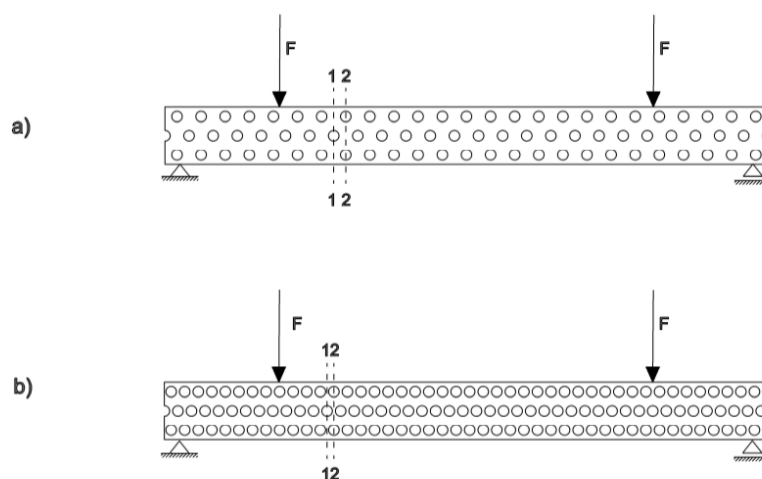
Slika 26: "Four point load" opterećenje

Tablica 3: Geometrija opterećenog nosača

Uzorak	l (mm)	d (mm)	h (mm)	b (mm)	a (mm)	c (mm)
B2	280	128	25,4	12,7	10	66
B3	400	248	38,1			

6 ANALITIČKO RJEŠENJE PROBLEMA

Kako je ranije rečeno, nosač je opterećen koncentriranim silama u četiri točke kao na slici 27. Nosač HMD B3 prikazan je na slici 27a, a nosač LMD B3 na slici 27b. U području između dvije nanese sile duljine d djeluje čisto savijanje. U području čistog savijanja odabrana su dva presjeka, 1 – 1 koji prolazi središtem jedne kružnice oslabljenja (jači presjek) i 2 – 2 koji prolazi kroz centar dviju kružnica (slabiji presjek). Presjeci su postavljeni na način da na oba oslabljenja razmatraju njihove maksimalne vrijednosti. Duljina između dva presjeka označena je s x .



Slika 27: Opterećenje nosača HMD B3 i LMD B3

Promotrimo presjek 1 – 1 (sl. 28a). Površina presjeka iznosi:

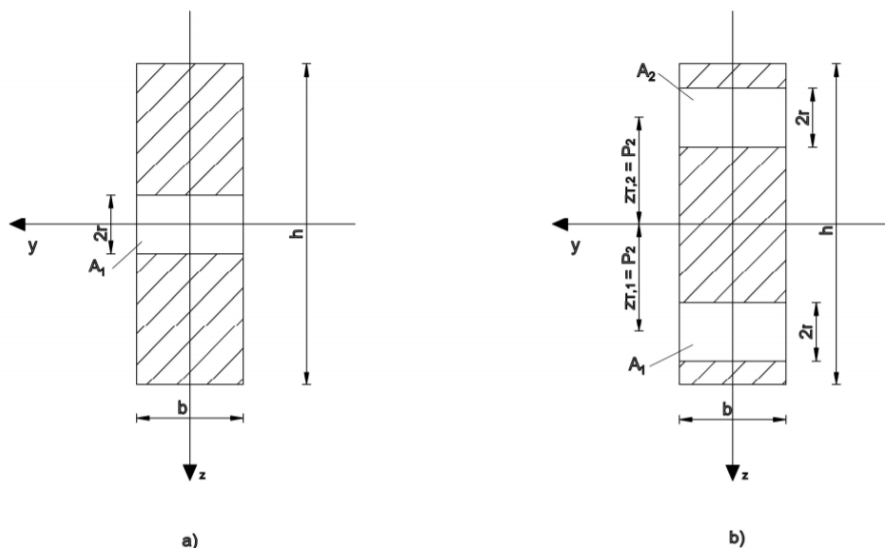
$$A = b (h - 2r) \quad (34)$$

Presjek je simetričan s obzirom na os y i os z , stoga:

$$S_y = 0$$

$$S_z = 0$$

$$I_{zy} = 0$$



Slika 28: Presjeci 1 - 1 i 2 - 2

Presjek 1 - 1 sastoji se od dvije površine od kojih niti jedna nema težište u težištu presjeka. Aksijalni moment tromosti dobivamo oduzimanjem momenta tromosti oslabljenja (A_0) od pravokutnog presjeka površine $A_p = b h$ (puni presjek). Uz oduzimanje momenata tromosti izračunatih prema izrazu (29a) dobivamo:

$$I_{y,1-1} = I_{y,p} - I_{y,o} = \frac{bh^3}{12} - \frac{b(2r)^3}{12}$$

Nakon uređivanja dobijemo:

$$I_{y,1-1} = \frac{b}{12}(h^3 - 8r^3) \quad (35)$$

Moment otpora prema izrazu (31) presjeka iznosi:

$$W_{y,1-1} = \frac{\frac{b}{12}(h^3 - 8r^3)}{\frac{h}{2}}$$

Nakon što sredimo jednadžbu:

$$W_{y,1-1} = \frac{b}{h} \frac{h^3 - 8r^3}{6} \quad (36)$$

Ako u jednađbe (35) i (36) uvrstimo dimenzije poprečnog presjeka nosača B3 dobivamo moment tromosti i moment otpora:

$$I_{y,1-1} = 58169,54 \text{ mm}^4$$

$$W_{y,1-1} = 3053,52 \text{ mm}^3$$

Sada promotrimo presjek 2 - 2 (sl. 28b). Površina presjeka iznosi:

$$A = b (h - 4r) \quad (37)$$

Presjek je simetričan s obzirom na os y i os z , stoga:

$$S_y = 0$$

$$S_z = 0$$

$$I_{zy} = 0$$

Presjek se sastoji od tri površine od kojih srednja površina ima težište u težištu presjeka, a rubne površine nemaju. Stoga aksijalni moment tromosti dobivamo preko Steinerovog pravila oduzimanjem oslabljenja od punog pravokutnog presjeka površine $A = b h$ (izraz 27):

$$I_{y,2-2} = I_{y,p} - (I_{y,o1} + A_{o,1} * z_{T,o,1}^2) - (I_{y,o,2} + A_{o,2} * z_{T,o,2}^2) \quad (38)$$

Pri čemu:

$$A_{o,2} = A_{o,3} = 2br \quad (39)$$

$$z_{T,o,1} = -z_{T,o,2} = P_2 \quad (40)$$

Kada izraze (39) i (40) uvrstimo u (38) dobivamo:

$$I_{y,2-2} = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{b(2r)^3}{12} + 2br * P_2^2 \right) - \left(\frac{b(2r)^3}{12} + 2br * (-P_2)^2 \right)$$

A kada izraz uredimo:

$$I_{y,2-2} = \frac{b}{12}(h^3 - 16r^3 - 48P_2^2r) \quad (41)$$

Moment otpora prema izrazu (31) iznosi:

$$W_y = \frac{\frac{b}{12}(h^3 - 16r^3 - 48P_2^2r)}{\frac{h}{2}}$$

Nakon što sredimo jednadžbu:

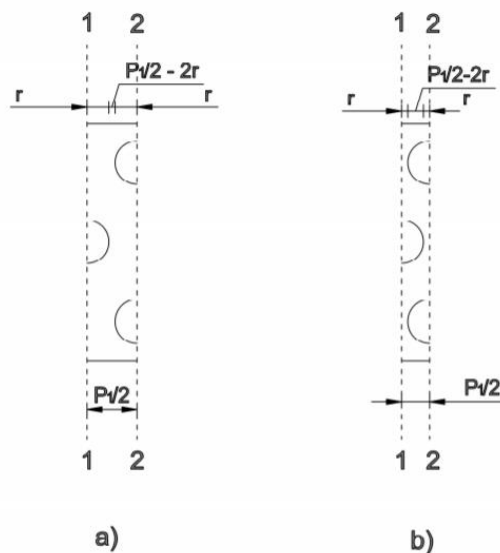
$$W_y = \frac{b}{h} \frac{(h^3 - 16r^3 - 48P_2^2r)}{6} \quad (42)$$

Ako u jednadžbe (41) i (42) uvrstimo dimenzije poprečnog presjeka dobivamo moment tromosti i moment otpora za geometriju B3:

$$I_y = 29129,17mm^4$$

$$W_y = 1529,09 mm^3$$

Promotrimo izrezani element između presjeka 1 - 1 i 2 - 2 duljine $P_1/2$. U ostatku ovoga poglavlja izvesti će se funkcija aksijalnog momenta tromosti s obzirom na poziciju udaljenu za x od presjeka 1 - 1 ($I_y = f(x)$). Ta funkcija će biti malo drugačija promatramo li izvojeni element iz nosača strukture HMD (sl. 29a) ili strukture LMD (sl. 29b). Funkcija će se satojati od tri segmenta, prvoga u kojem razmatramo oslabljenja iz presjeka 1 - 1, drugoga koji se rezlikuje između HMD i LMD strukture i trećega gdje razmatramo oslabljenja iz presjeka 2 - 2.



Slika 29: Element između presjeka 1-1 i 2-2 za HMD i LMD

Na slici 30a iz središta oslabljenja nacrtana je dužina duljine r koja dira kružnicu u točki na udaljenosti x od presjeka 1 - 1 . Povećanjem duljine x dužina r se otklanja od osi presjeka 1 - 1 za kut α . Za svaki kut α pomoću trigonometrijskih funkcija možemo odrediti udaljenost točke na kružnici od horizontalne i vertikalne osi. Udaljenost točke od vertikalne osi označiti ćemo s x , a od horizontalne sa z . Iz Pitagorina poučka dobivamo:

$$r^2 = x^2 + z^2$$

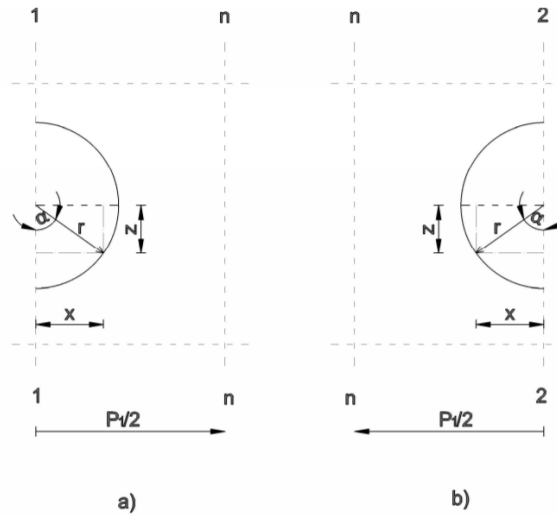
Iz toga slijedi:

$$z_{1-1} = \sqrt{r^2 - x^2} \quad (43)$$

Kako pomicanjem po osi x mjenjamo promatrane presijeke vidimo da se veličina oslabljenja u određenim presjecima smanjuje. Iz slike 30a vidimo kako je visina površine oslabljenja u ravnini presjeka jednaka $2z$. Na slici također vidimo da je:

$$z = \frac{x}{\tan \alpha} \quad (44)$$

Visina z ima dva ekstrema. Prvi ekstrem je u slučaju $\alpha = 0^\circ$ koji se pojavljuje za $x = 0$ i tada je $z_{max} = r$. Drugi ekstrem je u slučaju kada je $\alpha = 90^\circ$ za $x = r$, tada je $z_{min} = 0$.



Slika 30: Oslabljenja u strukturi nosača

Na drugom kraju izrezanog elementa imamo dva oslabljenja (sl. 30b). Dužinu r postavljamo u obje i ponavljamo postupak. Isti izrazi vrijede i za ovaj presjek, no duljinu x iz presjeka 1 - 1 postaje a i ona iznosi:

$$a = \frac{P_1}{2} - x \quad (45)$$

Uvrštavanjem izraza (45) u izraz (43) slijedi:

$$z_{2-2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{P_1}{2} - x\right)^2} \quad (46)$$

U presjeku 2 - 2 minimalna vrijednost z pojavljuje se pri kutu otklona $\alpha = 90^\circ$, a maksimalna za $\alpha = 0^\circ$. Funkcija $z = f(x)$ za izrezani segment duljine P_1 sastoji od tri dijela:

Na dužini $x = 0$ do $x = r$ od presjeka 1 - 1 :

$$z_{1-1} = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Na dužini $x = r$ do $x = \frac{P_1}{2} - r$ od presjeka 1 - 1 :

$$z = 0$$

Na dužini $x = \frac{P_1}{2} - r$ do $x = \frac{P_1}{2}$ od presjeka 1 - 1 :

$$z_{2-2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{P_1}{2} - x\right)^2}$$

Domena funkcije (43) je jednaka $D = [-r, r]$, a domena funkcije (46)

$D = \left[\frac{P_1}{2} - r, \frac{P_1}{2} + r\right]$. Time vidimo da funkcija $z = f(x)$ vrijedi i za područje iza presjeka 1 - 1 te nakon presjeka 2 - 2 te da se periodički ponavlja.

Ako u jednadžbama (35) i (41) radijus r zamijenimo visinom oslabljenja z i uredimo izraze dobivamo tri djela funkcije $I_y = f(x)$:

Na dužini $x = 0$ do $x = r$ od presjeka 1 - 1 uvrštavanjem (43) u (35):

$$I_y(x) = \frac{b}{12} \left(h^3 - 8(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right) \quad (47)$$

Na dužini $x = r$ do $x = \frac{P_1}{2} - r$ od presjeka 1 - 1 uvrštavanjem $z = 0$ u (35) ili (41):

$$I_y(x) = \frac{bh^3}{12} \quad (48)$$

Na dužini $x = \frac{P_1}{2} - r$ do $x = \frac{P_1}{2}$ od presjeka 1 - 1 uvrštavanjem (46) u (41):

$$I_y(x) = \frac{b}{12} \left(h^3 - 16 \left(r^2 - \left(\frac{P_1}{2} - x \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} - 48P_2^2 \left(r^2 - \left(\frac{P_1}{2} - x \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (49)$$

Nosač LMD strukture također ima tri zone, no kod njega druga zona nije bez oslabljenja već kumulativno djeluju oslabljenja iz presjeka 1 - 1 i 2 - 2. Kod nosača LMD funkcija $z = f(x)$ se sastoji od:

Na dužini $x = 0$ do $x = \frac{P_1}{2} - r$ od presjeka 1 - 1:

$$z_{1-1} = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Na dužini $x = r$ do $x = \frac{P_1}{2}$ od presjeka 1 - 1:

$$z_{2-2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{P_1}{2} - x\right)^2}$$

Na dužini $x = \frac{P_1}{2} - r$ do $x = r$ sudjeluju površine oslabljenja čije je centar u presjeku 1 - 1 i u presjeku 2 - 2. Stoga uvrštavamo oba člana :

$$z_{1-1} = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{i} \quad z_{2-2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{P_1}{2} - x\right)^2}$$

Funkcija $I_y = f(x)$ u prostoru od $x = \frac{P_1}{2} - r$ do $x = r$ glasi:

$$I_y(x) = \frac{b}{12} (h^3 - 8 z_{1-1}^3 - 16 z_{2-2}^3 - 48 P_2^2 r)$$

Nakon što uvrstimo z_{1-1} i z_{2-2} :

$$I_y(x) = \frac{b}{12} \left(h^3 - 8 (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} - 16 \left(r^2 - \left(\frac{P_1}{2} - x\right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} - 48 P_2^2 \left(r^2 - \left(\frac{P_1}{2} - x\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (50)$$

Uzorak FM B2 punog pravokutnog poprečnog presjeka ima konstantan moment tromosti duž nosača koji iznosi:

$$I_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{12,7 * 25,4^3}{12} = 17342,98 \text{ mm}^4$$

Funkciju aksijalnog momenta tromosti nosača HMD B2 i LMD B2 nećemo analitički razmatrati. Raspored perforacija čini uzorak nesimetričnim s obzirom na os

nosača i stoga je neutralna os nosača nije ravna linija već krivulja funkcije od x što taj primjer čini mnogo kompleksnijim.

Iz statike nosača možemo izračunati:

$$\Sigma F_y = 0; \quad R_A + R_B - 2F = 0 \quad \rightarrow \quad R_A = R_B = F$$

$$\Sigma M_{(a+c)} = 0; \quad R_A * c - M_{y,(a+c)} = 0 \quad \rightarrow \quad M_{y,(a+c)} = R_A * c$$

Nosač HMD B3 opterećen je silom $F = 2$ kN koja na kraku $c = 66$ mm stvara konstantan moment savijanja $M = 0,132$ kNm, a nosač LMD B3 opterećen je silom $F = 1,25$ kN koja na kraku $c = 66$ mm stvara moment $M = 0,0825$ kNm. Iz rezultata mjerenja deformacija uzorka FM B2 izračunali smo modul elastičnosti aluminija $E = 71$ GPa na način da smo za više proizvoljnih vremena t očitali nanesenu silu F na preši i deformaciju ε na tenzometru. Uz pomoć izraza (7) dobiveni su moduli elastičnosti E za sva tri uzorka na više mjesta unutar područja linearnog odnosa naprezanja i deformacija, te je uzet njihov prosjek. Također, izračunat je modul elastičnosti $E = 66,86$ GPa temeljem izraza (7) za prosječna maksimalna naprezanja i deformacije prije rasterećenja na sva tri uzorka. Iz izraza (13) dobivamo naprezanje u krajnjim vlaknima, te iz izraza (7) dobivamo deformaciju krajnjih vlakana. U tablici 4 prikazani su rezultati izračuna deformacija uzoraka HMD B3 i LMD B3 u presjecima 1 - 1 i 2 - 2.

Tablica 4: Deformacija nosača HMD B3 i LMD B3

Uzorak	Presjek	F_{\max} (kN)	M_{\max} (kNm)	I_y (mm ⁴)	$\pm \sigma_{\max}$ (MPa)	$\pm \varepsilon_{\max}$ (m/m)
HMD B3	1-1	2	0,132	58169,54	43,23	0,00061
	2-2			29129,17	86,33	0,00122
LMD B3	1-1	1,25	0,0825	58169,54	27,02	0,00038
	2-2			29129,17	53,95	0,00076

Na temelju tablice 4 možemo odrediti prosječnu deformaciju duž nosača HMD B3 i LMD B3 za $E = 71$ GPa:

$$\varepsilon_{av,HMD B3} = 0,00091$$

$$\varepsilon_{av,LMD B3} = 0,00057$$

Prosječna deformacija duž nosača HMD B3 i LMD B3 za $E = 66,86$ GPa iznosi:

$$\varepsilon_{av,HMD B3} = 0,00097$$

$$\varepsilon_{av,LMD B3} = 0,00061$$

U nastavku će se razmatrati rezultati tenzometarskog mjerenja deformacija, te će se usporediti s analitički izračunatim deformacijama.

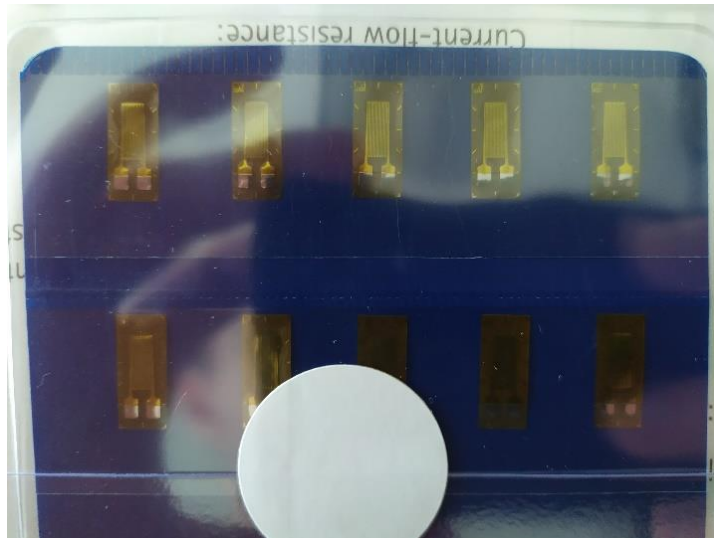
7 EKSPERIMENTALNO RJEŠENJE PROBLEMA

7.1 O tenzometriji

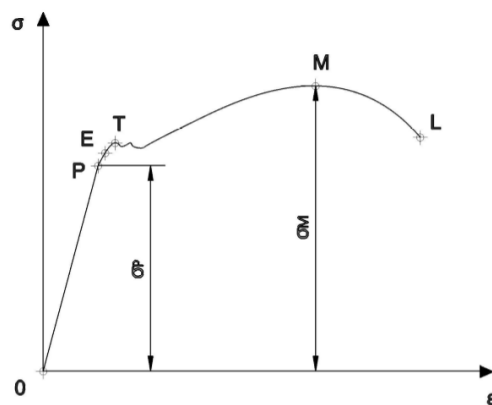
Osim analitičkih rješenja, probleme čistog savijanja može se proučavati i eksperimentalno. Eksperimentalna analiza savijanja se svodi na mjerenje deformacije u odabranim točkama krajnjih vlakana nosača nakon nanošenja opterećenja. Deformacije možemo mjeriti tezometarski i optički, a mjeračem pomaka na hidrauličkoj preši možemo mjeriti progib nosača. U ovome dijelu razmatrati ćemo mjerenje tenzometrima. Metoda mjerenja tenzometrima naziva se metoda tenzometrije. Deformacije i naprezanja nije moguće mjeriti izravno, stoga mjerimo neke druge parametre iz kojih proračunavamo tražene veličine [8]. U ovome slučaju mjerimo produljenje Δl između dvije točke na nekom djelu elementa. Poznajući početnu udaljenost između dviju točaka i izmjerenog produljenja na temelju izraza možemo izračunati deformaciju:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta l}{l} \quad (51)$$

Postoje razne vrste tenzometara, no ona najčešća i ona koja će biti primijenjena u ovom istraživanju je elektrootpornički tenzometr. Tenzometar se sastoji od tanke žice savijene na način da tvore mjernu plohu paralelnih niti (sl. 31). Na kraju tenzometra nalaze se dva terminala predviđena za povezivanje žica koje se spajaju u mjerni most. Tenzometar se učvrsti na gornju i donju (ili samo jednu) stranu uzoraka koji razmatramo te se pri deformaciji uzorka deformiraju i niti tenzometra. Pri čistom savijanju gornji i donji tenzometar u istom presjeku bilježiti će približno jednaku apsolutnu veličinu deformacija koja ne može biti potpuno jednaka radi točnosti mjerenja. Mjerenja se moraju odvijati dok je materijal u linearno – elastičnom stanju. Na slici 32 prikazan je $\sigma - \varepsilon$ dijagram čelika. Točka M prikazuje vršno naprezanje uzorka, no tenzometrima možemo mjeriti do točke P, tj. točke proporcionalnosti do koje vrijedi Hookov zakon (7).



Slika 31: Tenzometri 1 - LY41 - 6/120



Slika 32: Radni dijagram čelika

Princip rada svodi se na produljenje ili skraćenje niti tenzometra tokom deformacije nosača prilikom koje se mijenja i njihov poprečni presjek ovisno o Poissonovu koeficijentu ν (sl. 33). Prilikom promjene dimenzija poprečnog presjeka mijenja se električni otpor struje koja prolazi kroz tenzometar na način da otpor raste pri smanjenju površine presjeka niti i obrnuto. Ako je osna deformacije žice tenzometra jednaka:

$$\varepsilon_{ax} = \frac{\Delta l}{l} \quad (52)$$

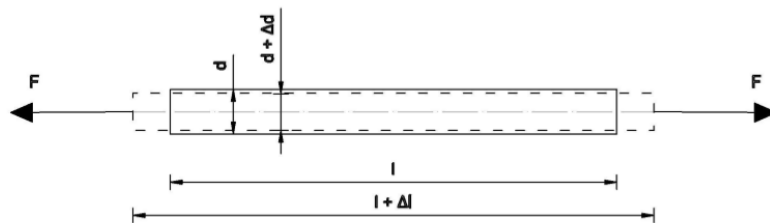
tada znamo da je lateralna deformacija koja je okomita na osnu jednaka:

$$\varepsilon_{lat} = -\nu \varepsilon_{ax} = \frac{\Delta d}{d} \quad (53)$$

Iz uvrštavanja jednadžbe (52) u (53) slijedi:

$$\frac{\Delta d}{d} = -\nu \frac{\Delta l}{l} \quad (54)$$

Gdje je ν Poissonov koeficijent koji za neuksetične izotropne materijale iznosi $0 \leq \nu < 0,5$. Poissonov koeficijent tenzometarske žice naveden je od strane proizvođača.



Slika 33: Promjena promjera u ovisnosti promjene dužine žice

Početni otpor žice je jednak:

$$R_0 = \rho_0 \frac{l_0}{A_0} \quad (55a)$$

Gdje je l_0 nedeformirana duljina žice, A_0 nedeformirana površina presjeka žice i ρ_0 električna otpornost nedeformiranog materijala, a otpor deformirane žice jednak:

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad (55b)$$

Gdje su l , A i ρ duljina, promjer i električna otpornost deformirane žice. Pri ovome vrijede izrazi:

$$l = l_0 (1 + \varepsilon) \quad (56)$$

$$A = A_0 (1 - \nu \varepsilon)^2 \quad (57)$$

$$\rho = \rho_0 (1 + \beta \varepsilon) \quad (58)$$

Gdje je β koeficijent promjene otpora žice u ovisnosti od naprezanja u žici. Pri povećanju duljine žice za Δl površina poprečnog presjeka se smanjuje za ΔA te se time električni otpor mijenja za ΔR . Približno je točno [8]:

$$\frac{\Delta R}{R} \approx \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta A}{A}$$

Također, mora nam biti poznat faktor tenzometra ili osjetljivost mjerne trake k koji iznosi [8]:

$$k = 1 + \beta + 2\nu \quad (59)$$

Uz pomoć faktora tenzometra k dobivamo vezu između promjene otpora i deformacije:

$$\varepsilon_{ax} = \frac{1}{k} \frac{\Delta R}{R} \quad (60)$$

Faktor tenzometra specificira proizvođač. Mjerne žice izrađuju se s otporom od 120 Ω , 350 Ω ili 600 Ω .

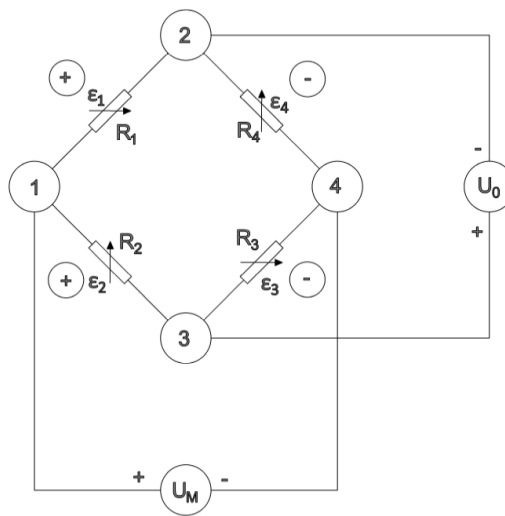
Mjerne žice tenzometra moraju biti usmjereni u onome smjeru za koji se promatra deformacija. Kod mjerenja deformacije na više pozicija uzorka svi tenzometri su spojeni u mjerni most (mjerno pojačalo). Korištenjem većeg broja tenzometara moguće je mjeriti naprezanja pod različitim osima. U ovom slučaju promatrano je jednoosno stanje naprezanja, tako da će tenzometri biti orijentirani samo u jednom pravcu.

Za mjerenje promjene otpora tenzometre spajamo u mjerni most, najčešće Wheatstoneov mjerni most (sl. 34). Unutar mjernog mosta promatramo otpornika R_1 , R_2 , R_3 i R_4 i uravnotežavanje njihovih omjera:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_3} \quad (61)$$

Ako omjer otpora nije u ravnoteži dolazi do pojave potencijala koji uzrokuje povećanje izlaznog napona U_M koje je proporcionalno promjeni omjera otpora. Odnos izlaznog napona i ulaznog napona jednak je:

$$\frac{U_M}{U_0} = \frac{R_1 + \Delta R_1}{R_1 + \Delta R_1 + R_2 + \Delta R_2} - \frac{R_4 + \Delta R_4}{R_3 + \Delta R_3 + R_4 + \Delta R_4} \quad (62)$$



Slika 34: Wheatstoneov mjerni most

Pri spajanju Wheatstoneovog mosta razlikujemo puni most gdje su na mjestima sva četiri otpornika tenzometri, polu most s dva otpornika i dva tenzometra i četvrtinski most sa samo jednim tenzometrom [8].

Veličinu momenta savijanja na mjestu mjerenja deformacije na nosaču možemo izračunati pomoću izraza:

$$M = \sigma_{max} W_y = \varepsilon E W_y \quad (63)$$

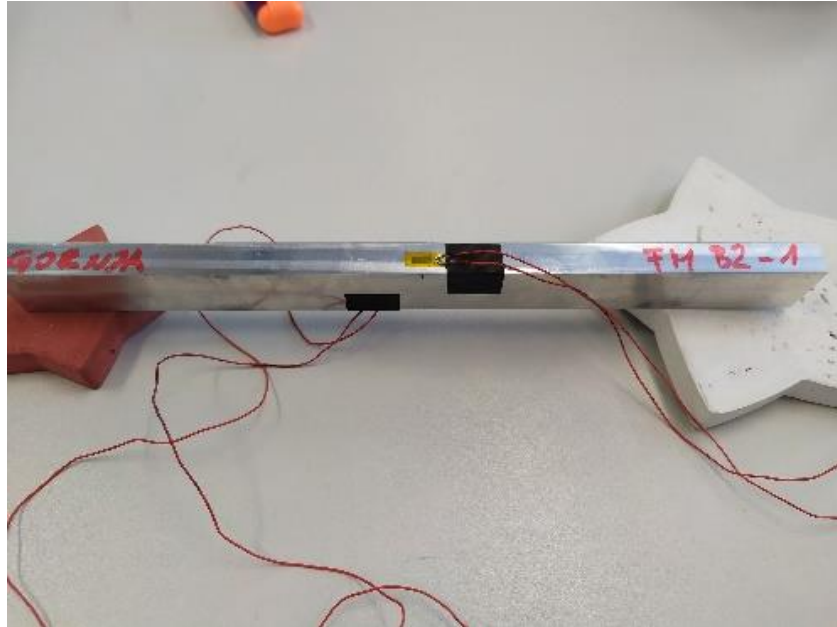
U izrazu je uvršten σ_{max} jer se tenzometri nalaze na vlaknima najudaljenijim od neutralnog sloja i mjere maksimalne deformacije uzorka.

7.2 Mjerenja deformacije i rezultati

Laboratorijsko ispitivanje uzoraka opterećenih čistim savijanjem provedeno je na pet različitih vrsta uzoraka, od koje je svaka vrsta imala tri jednaka kontrolna uzorka. Uzorci su proizvedeni od aluminijskih s modulom elastičnosti čija je vrijednost od $E = 71 \text{ GPa}$ dobivena iz rezultata izmjerenih deformacija uzorka FM B2 punog pravokutnog profila. Svi uzorci su opterećeni hidrauličnom prešom proizvođača Controls koncentriranim silama u 4 točke (sl. 27). Između dvije unutarnje vertikalno nanosene sile nalazi se područje konstantnog momenta tj. čistog savijanja.

Mjerenja su izvedena metodom tenzometrije i rezultati su obrađeni računalnim programom Signal Express. Uzorci su nazvani po gustoći svoje strukture i dimenziji nosača, tako da se testiranje provelo na uzorcima FM B2, HMD B2, LMD B2, HMD B3 i LMD B3. Pri pokusu korišteni su tenzometri 1 – LY41 – 6/120 (sl. 32). U oznaci tenzometra LY41 predstavlja tenzometar s dva terminala za spajanje, 6 duljinu mjernog polja u mm i 120 električni otpor tenzometra u Ω . Za ovaj model tenzometra osjetljivost mjerne trake iznosi $k = 2,05$. Prije ispitivanja uzorci su očišćeni medicinskim alkoholom, a zatim su na njih jednokomponentnim ljevilom pričvršćeni tenzometri na prije označene pozicije. Na uzorke FM B2 pričvršćena su dva tenzometra u sredini raspona, jedan s gornje i drugi s donje strane (sl. 35), a na ostale uzorke po tri uzorka s gornje i donje strane, jedan na sredini nosača i po jedan s lijeve i desne strane. Na uzorcima HMD B2 i LMD B2 srednji tenzometri su postavljeni iznad i ispod presjeka čije je oslabljenje iznad uzdužne osi nosača, a u presjecima na lijevoj i desnoj strani tenzometri su postavljeni u presjeku čije je oslabljenje ispod uzdužne osi nosača. Na uzorku HMD B3 srednji tenzometri postavljeni su u jačem presjeku s jednim oslabljenjem (presjek 1 – 1), a tenzometri s lijeve i desne strane postavljeni su u slabijim presjecima s dva oslabljenja (presjek 2 – 2). Na uzorku LMD B3 tenzometri su postavljeni suprotno, oni u sredini su u presjeku 2 – 2, a oni sa strane u presjeku 1 – 1. Tenzometri su postavljeni u smjeru elastične linije nosača te su lemljenjem terminali povezani sa žicama koje prenose signal do računalne jedinice. Povezani su u Wheatstoneov mjerni most modul četvrtinskog mosta. Tim modulom postignuto je da se svaki tenzometar mjerenje obavlja zasebno te u mostu tri otpornika imaju konstantan otpor. Za taj način spajanja veličina deformacije iznosi:

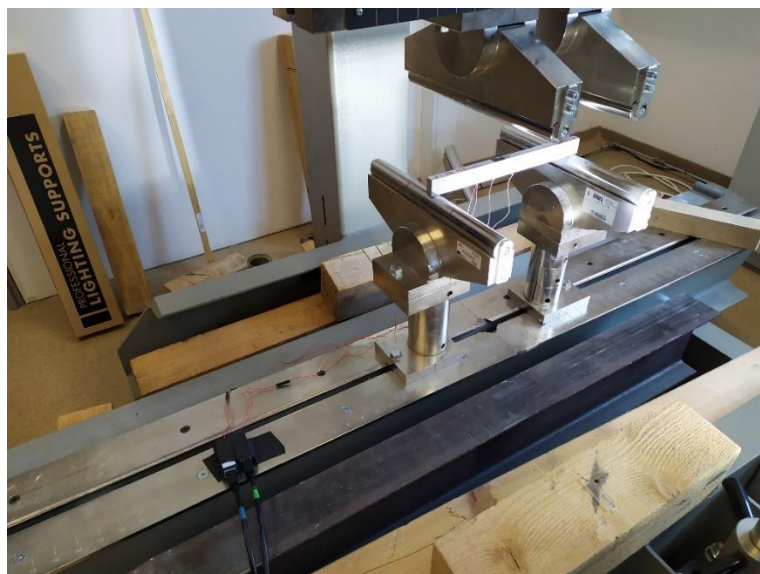
$$\varepsilon_{xx} = \frac{4 U_M}{k U_0} \quad (64)$$



Slika 35: Povezani tenzometri na uzorku FM B2

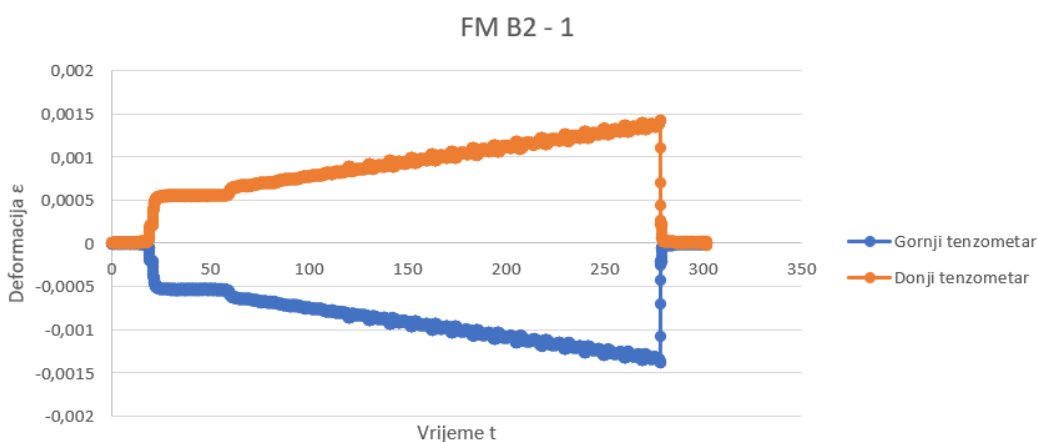
Nakon povezivanja mostova u program Signal Express uneseni su parametri k , R , modul mjernog mosta i maksimalna i minimalna deformacija ε za koju se unijela vrijednost $\pm 4 \mu\text{m/m}$. Uzorci su stavljeni unutar preše kao na slici 36 i prijenosi opterećenja su namješteni na odgovarajuće pozicije ovisno o tome jesu li testirani uzorci B2 ili B3 (sl. 26).

U nastavku su prikazani $\varepsilon - t$ dijagrami rezultata mjerenja uzoraka FM B2, HMD B2, LMD B2, HMD B3 i LMD B3.

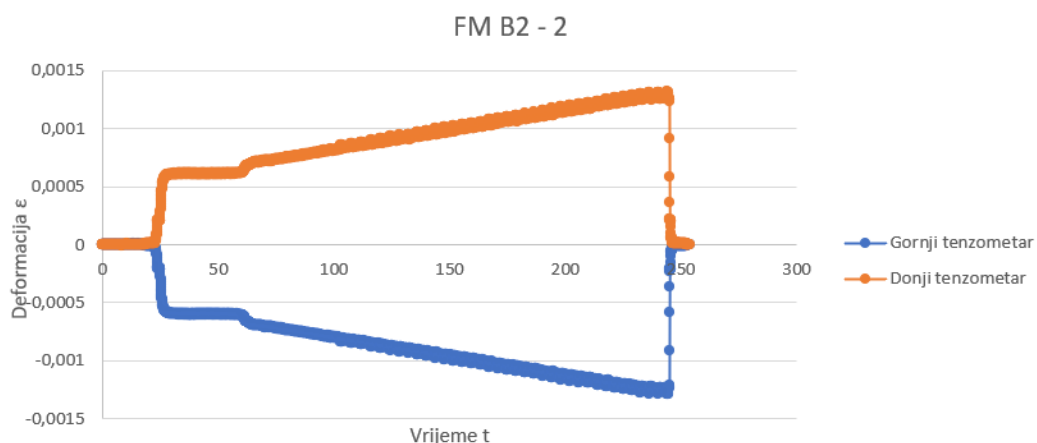


Slika 36: Uzorak FM B2 u hidrauličnoj preši

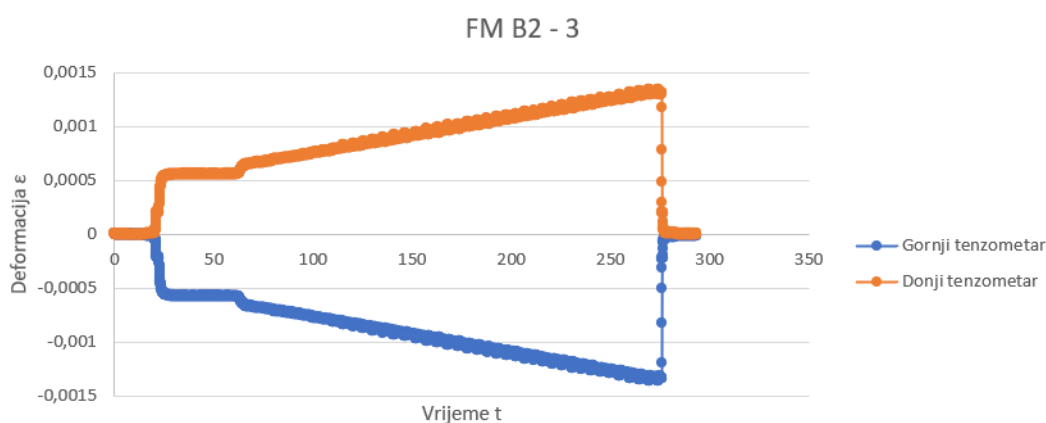
Uzorci FM B2 opterećeni su postupnim nanošenjem sile do $F_{max} = 1,75 \text{ kN}$. Na $\epsilon - t$ dijagramima na slikama 37, 38 i 39 prikazani su rezultati mjerenja deformacija. Vidimo da su rezultati mjerenja podjednaki i da nema većih odstupanja u maksimalnim deformacijama prikazanim u tablici 6. Prosječne maksimalne izmjerene deformacije iznose $\epsilon_{av,t,FM B2} = 0,00136$ i $\epsilon_{av,c,FM B2} = -0,00135$ i vidimo da su maksimalna prosječna tlačna i vlačna deformacija gotovo jednake. Temeljem ovih rezultata analitičkim putem izračunat je Youngov modul elastičnosti materijala uzoraka vrijednosti $E = 71 \text{ GPa}$ za više područja unutar linearnog kretanja dijagrama i $E = 66,86 \text{ GPa}$ za prosječne maksimalne vrijednosti naprezanja prije rasterećenja .



Slika 37: $\epsilon - t$ dijagram uzorka FM B2 - 1



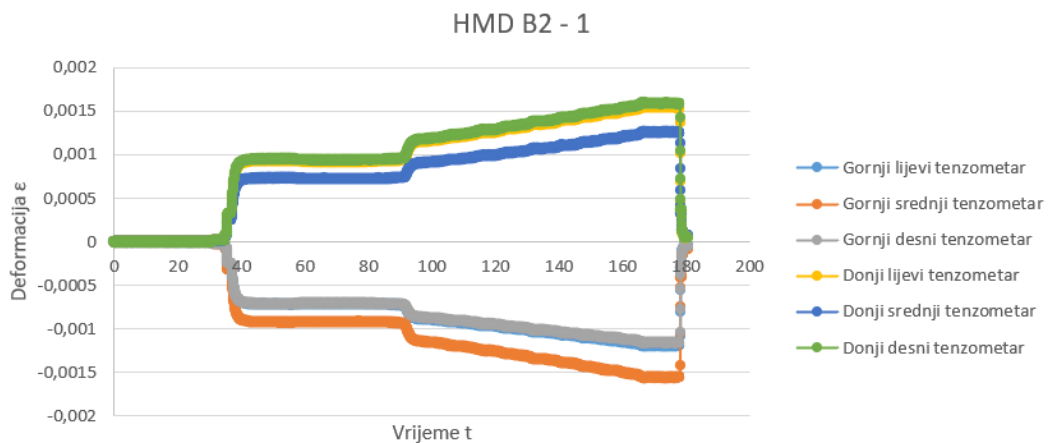
Slika 38: $\epsilon - t$ dijagram uzorka FM B2 - 2



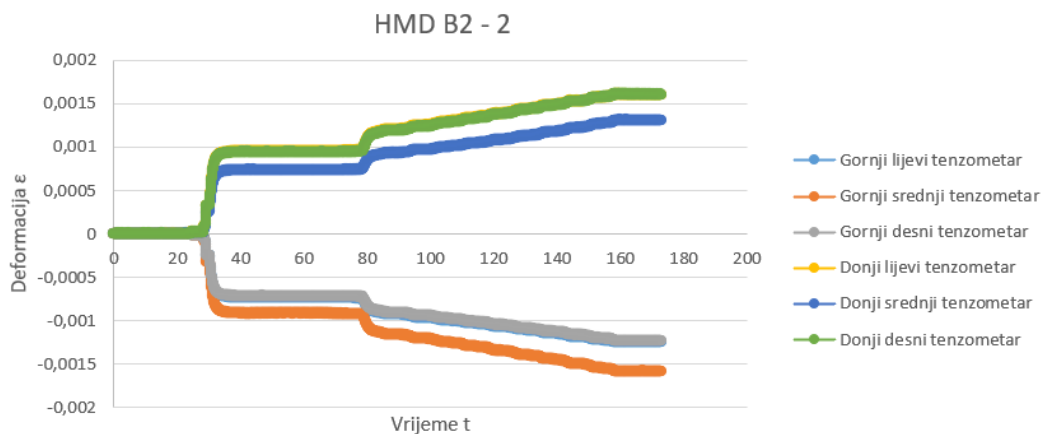
Slika 39: $\epsilon - t$ dijagram uzorka FM B2 - 3

Uzorci HMD B2 - 1 HMD B2 - 2 opterećeni su postupnim nanošenjem sile do $F_{max} = 1,41 \text{ kN}$, odnosno $F_{max} = 1,42 \text{ kN}$. Uzorak HMD B2 - 3 opterećen je do maksimalne sile $F_{max} = 2,24 \text{ kN}$ te se pri toj sili plastično deformirao, što njegove rezultate čini neupotrebljivim zbog izlaska iz zone za koju vrijedi Hookeov zakon. Na $\epsilon - t$ dijagramima sa slika 40, 41 i 42 prikazani su rezultati mjerenja deformacija. Rezultati mjerenja na uzorcima 1 i 2 približno su jednaki i prikazani su zajedno s rezultatima uzorka u tablici 6. Prosječne maksimalne izmjerene deformacije ne uzimajući u razmatranje rezultate uzorka 3 iznose $\epsilon_{av,t,HMD B2} = 0,00149$ i $\epsilon_{av,c,HMD B2} = -0,00134$. Očigledno je kako je razlika između tlačnih i vlačnih

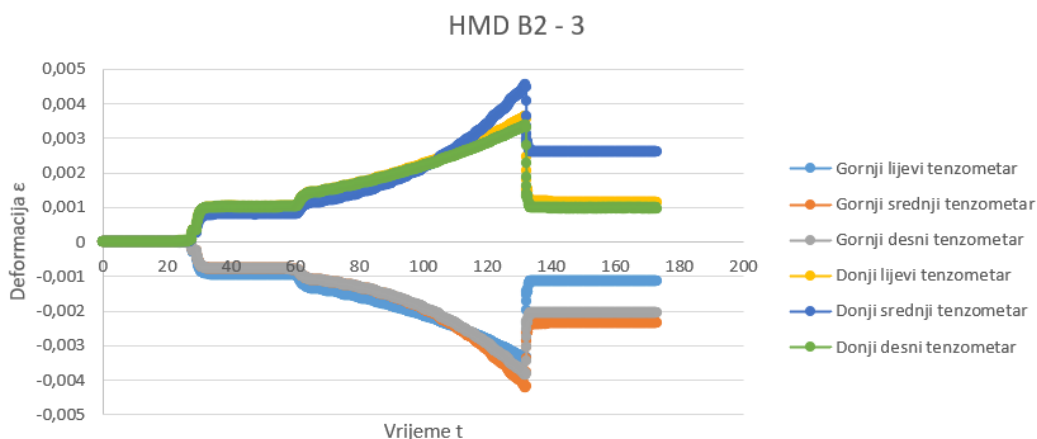
deformacija veća nego kod ostalih uzoraka što tumačimo horizontalnom nesimetričnošću nosača i zakrivljenom težišnom osi. Također možemo uočiti da je deformacija izmjerena na gornjem srednjem tenzometra veća od onih na njegovoj lijevoj i desnoj strani, što je suprotno intuitivnoj pretpostavci kako će srednja gornja deformacija biti manja jer tenzometar nije iznad oslabljenja. Suprotno vrijedi za donju stranu gdje je srednji tenzometar izmjerio manju deformaciju od onih s njegova lijeva i desna dok smo očekivali da će izmjeriti veću.



Slika 40: $\epsilon - t$ dijagram uzorka HMD B2 - 1

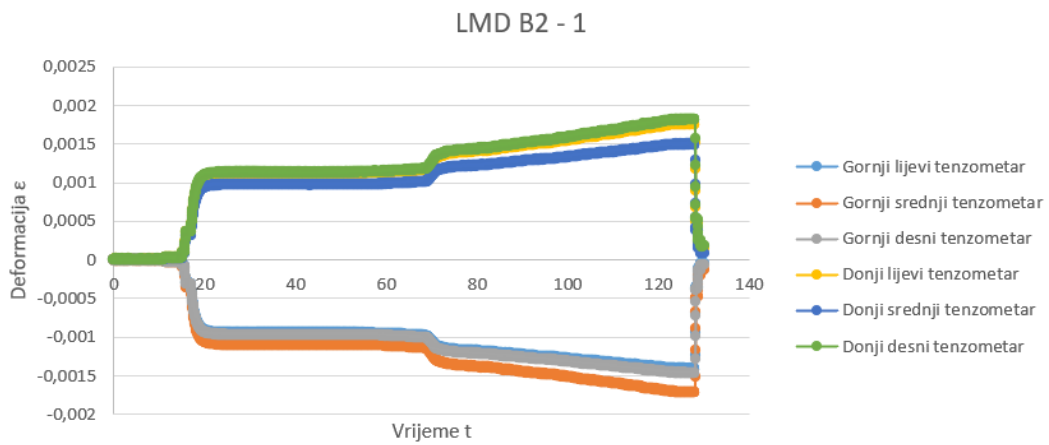


Slika 41: $\epsilon - t$ dijagram uzorka HMD B2 - 2

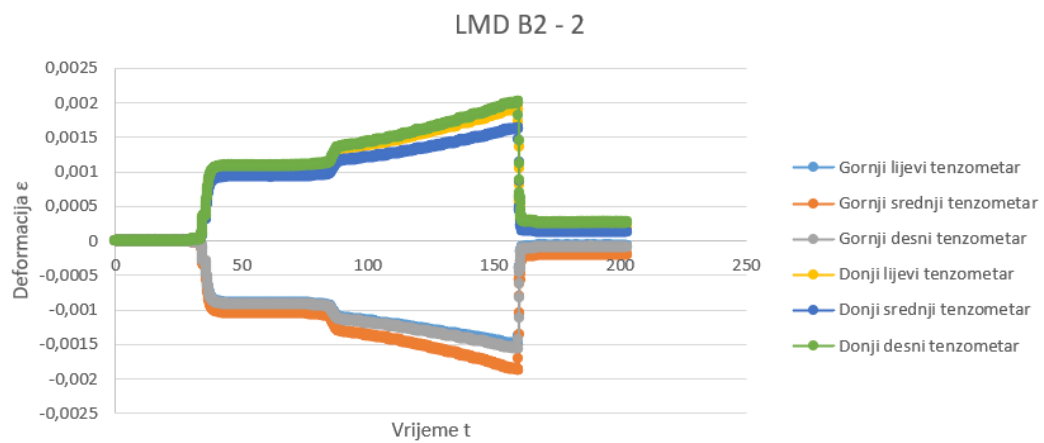


Slika 42: $\varepsilon - t$ dijagram uzorka HMD B2 - 3

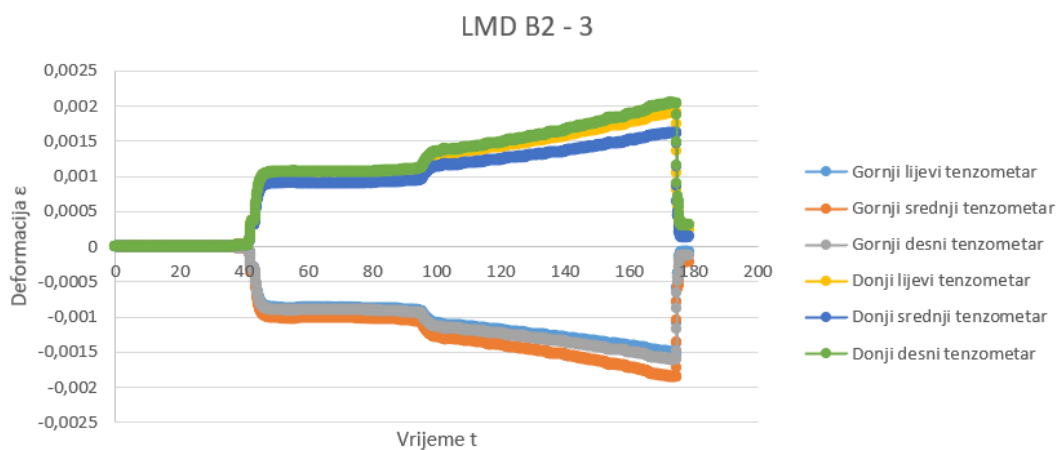
Uzorci LMD B2 opterećeni su postupnim nanošenjem sile do $F_{max} = 1,25 \text{ kN}$, odnosno $F_{max} = 1,26 \text{ kN}$ i $F_{max} = 1,27 \text{ kN}$. Na $\varepsilon - t$ dijagramima na slikama 43, 44 i 45 prikazani su rezultati mjerenja deformacija. Vidimo da su rezultati mjerenja podjednaki, no uočavamo nelinearno kretanje dijagrama 2 i 3 te njihove blago povećane maksimalne vrijednosti deformacija. Možemo zaključiti kako su i ta dva uzorka plastično deformirani, stoga u razmatranje prosječnih deformacija uzimamo samo uzorak 1. Veličine deformacija prikazane su u tablici 6. Prosječne maksimalne izmjerene deformacije iznose $\varepsilon_{av,t,LMD B2} = 0,0017$ i $\varepsilon_{av,c,LMD B2} = -0,00154$. Na ovom uzorku također vidimo odstupanje od maksimalne tlačne i vlačne deformacije što također pripisujemo horizontalnom nesimetričnošću nosača i nelinearnom elastičnom osi. Kao i na uzorku HMD B3 deformacije na gornjem srednjem tenzometru su veće, a na donjem manje od onih tenzometara koji se nalaze sa strane.



Slika 43: $\epsilon - t$ dijagram uzorka LMD B2 - 1

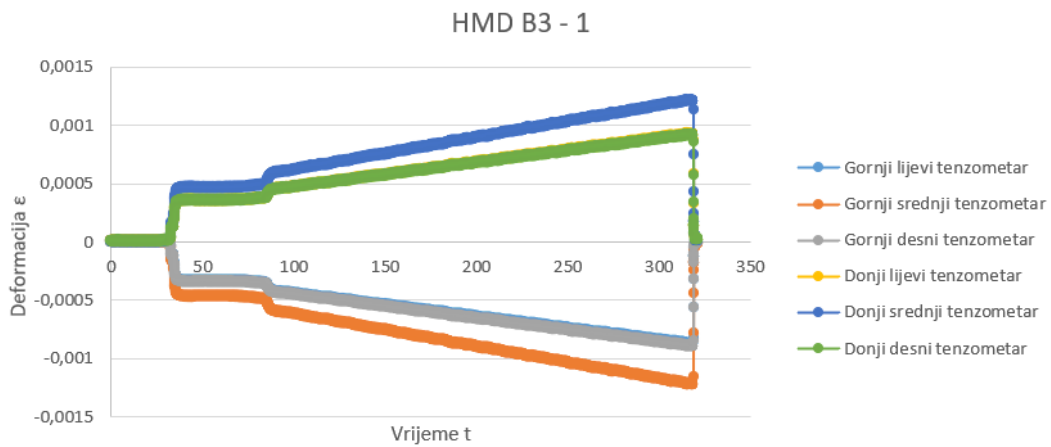


Slika 44: $\epsilon - t$ dijagram uzorka LMD B2 - 2

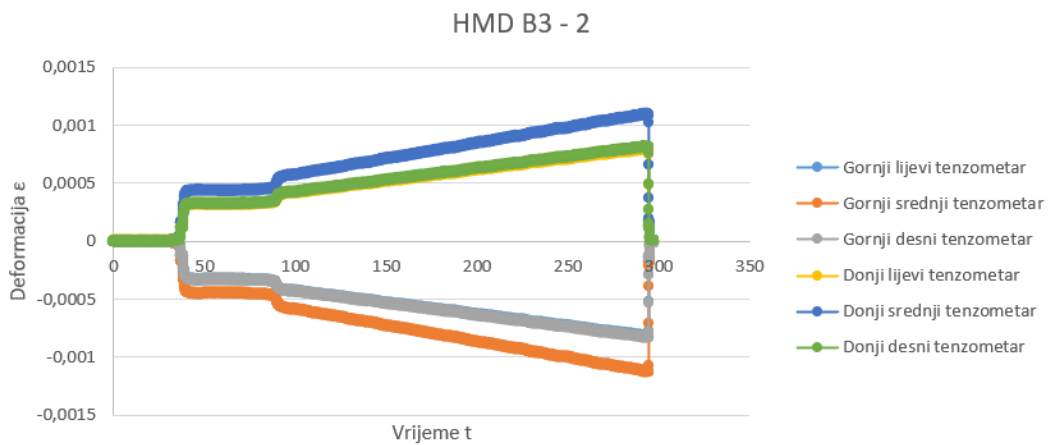


Slika 45: $\epsilon - t$ dijagram uzorka LMD B2 - 3

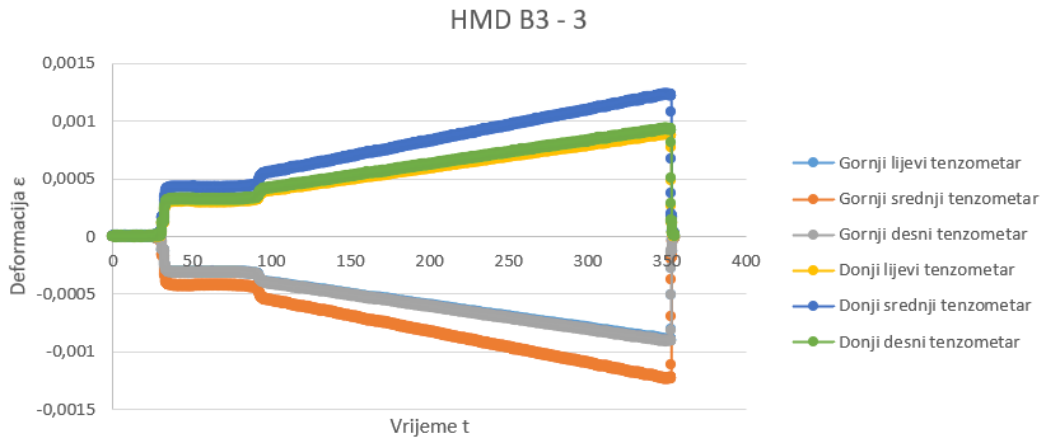
Uzorci HMD B3 opterećeni su postupnim nanošenjem sile do $F_{max} = 2,005 \text{ kN}$ za uzorak 1, odnosno $F_{max} = 2,01 \text{ kN}$ za uzorke 2 i 3. Na $\epsilon - t$ dijagramima sa slika 45, 47 i 48 prikazani su rezultati mjerenja deformacija. Vidimo da su rezultati mjerenja podjednaki i da nema većih odstupanja u maksimalnim deformacijama prikazanim u tablici 6. Prosječne maksimalne izmjerene deformacije iznose $\epsilon_{av,t,HMD B3} = 0,00099$ i $\epsilon_{av,c,HMD B3} = -0,00098$ i vidimo da su maksimalna prosječna tlačna i vlačna deformacija gotovo jednake. Na ovom dijagramu vidimo da su deformacije na srednjim tenzometrima u apsolutnoj vrijednosti veće od onih sa strane, što je ponovo suprotno našem intuitivnom zaključku da će biti manje. Naime srednji presjek je zapravo jači presjek 1 - 1 i trebao bi imati manju deformaciju.



Slika 46: $\epsilon - t$ dijagram uzorka HMD B3 - 1

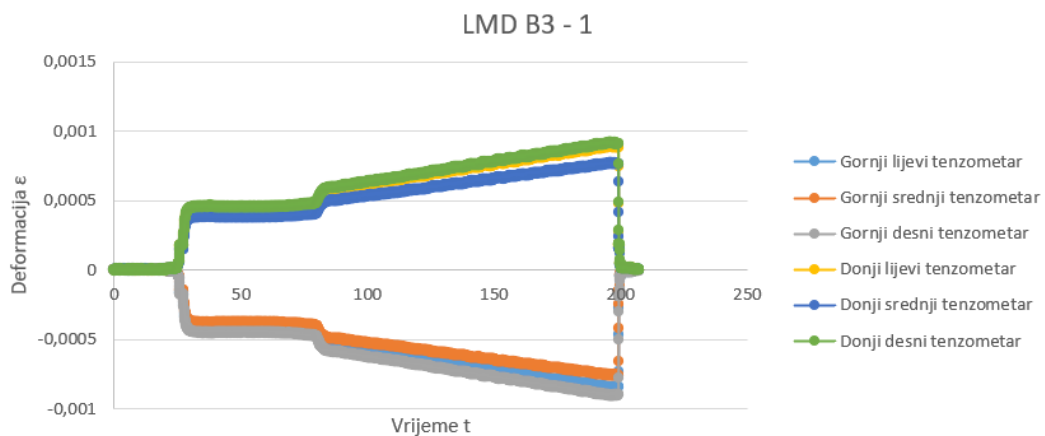


Slika 47: $\epsilon - t$ dijagram uzorka HMD B3 - 2

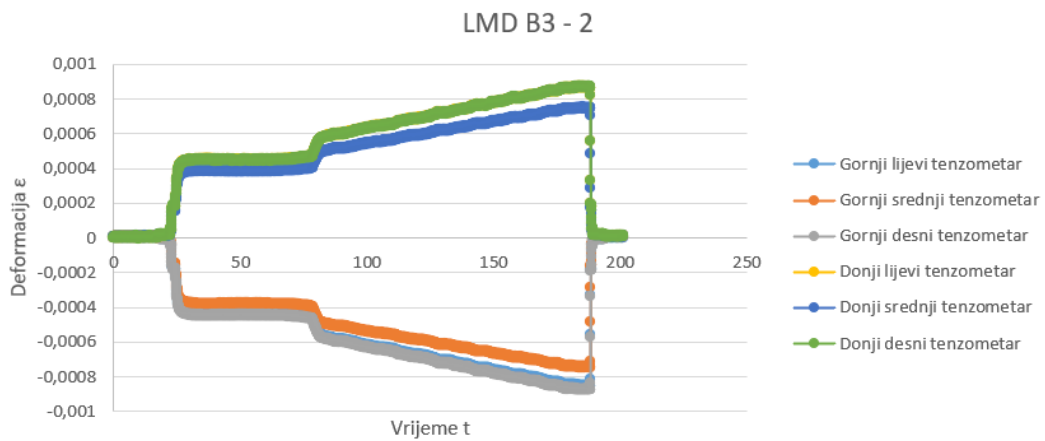


Slika 48: $\epsilon - t$ dijagram uzorka HMD B3 - 3

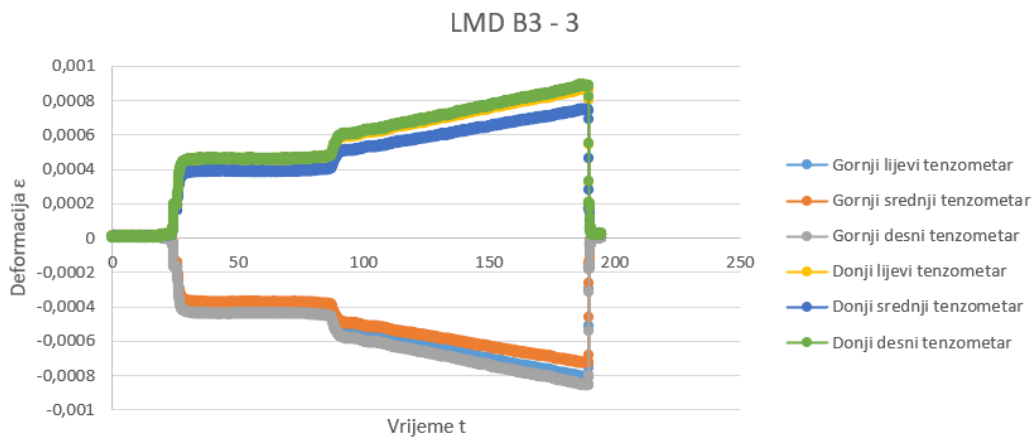
Uzorci LMD B3 opterećeni su postupnim nanošenjem sile do $F_{max} = 1,255 \text{ kN}$ za uzorak 1, odnosno $F_{max} = 1,26 \text{ kN}$ za uzorke 2 i 3. Na $\epsilon - t$ dijagramima na slikama 49, 50 i 51 prikazani su rezultati mjerenja deformacija. Vidimo da su rezultati mjerenja podjednaki i da nema većih odstupanja u maksimalnim deformacijama prikazanim u tablici 6. Prosječne maksimalne izmjerene deformacije iznose $\epsilon_{av,t,LMD B3} = 0,00085$ i $\epsilon_{av,c,LMD B3} = -0,00082$ i vidimo da su maksimalna prosječna tlačna i vlačna deformacija gotovo jednake. Na ovom uzorku gornji i donji srednji tenzometar bilježe u apsolutnoj vrijednosti manje deformacije od onih sa strane, što je ponovo suprotno našoj intuitivnoj pretpostavci, jer je u ovom slučaju srednji presjek slabiji presjek 2-2.



Slika 49: $\epsilon - t$ dijagram uzorka LMD B3 - 1



Slika 50: $\epsilon - t$ dijagram uzorka LMD B3 - 2



Slika 51: $\epsilon - t$ dijagram uzorka LMD B3 - 3

Razlike između maksimalnih prosječnih tlačnih i vlačnih napreznja koje se pojavljuju kod uzoraka FM B2 opterećenih silom $F = 1,75$ kN, HMD B3 opterećenih silom $F = 2$ kN i LMD B3 opterećenih s $F = 1,25$ kN pripisujemo pogrešci mjernih uređaja. Razlike u napreznjima uzoraka HMD B2 i HMD B3 prepisujemo prije spomenutoj nelinearnosti elastične osi i horizontalnom nesimetričnošću nosača zbog kojih probleme ta dva nosača nismo rješavali analitički. Razlike u veličini deformacija između srednjeg tenzometra i onih sa strane možemo pokušati objasniti koncentracijom napreznja koju nismo razmatrali. Naime na tenzometrima koji su bili između dva oslabljenja izmjerili smo veće deformacije nego na onim koji su bili iznad oslabljenja. To možemo objasniti kumulativnom djelovanju koncentracija između dva oslabljenja. Za potvrđivanje te teze potrebna su daljnja ispitivanja i

analiza pomoću teorije elastičnosti. Tablica 5 prikazuje rezultate maksimalnih izmjerenih naprezanja svih uzoraka u ovisnosti o poziciji tenzometara. Tablica 6 prikazuje prosječne maksimalne deformacije duž nosača.

Tablica 5: Deformacije uzoraka izmjerene metodom tenzometrije

Uzorak	Redni br. testiranja	Maksimalne apsolutne deformacije					
		G.L.	G.S.	G.D.	D.L.	D.S.	D.D.
FM B2	1	/	-0,0014	/	/	0,00142	/
	2	/	-0,00129	/	/	0,00132	/
	3	/	-0,00136	/	/	0,00135	/
HMD B2	1	-0,0012	-0,00157	-0,00117	0,00155	0,00127	0,0016
	2	-0,00126	-0,00159	-0,00124	0,00162	0,00132	0,00162
	3	-0,0034	-0,00422	-0,00387	0,00363	0,00456	0,00338
LMD B2	1	-0,00142	-0,00172	-0,00147	0,00177	0,00151	0,00183
	2	-0,00151	-0,00187	-0,00157	0,00192	0,00164	0,00202
	3	-0,00151	-0,00186	-0,00161	0,00192	0,00163	0,00205
HMD B3	1	-0,00087	-0,00122	-0,00089	0,00094	0,00122	0,00093
	2	-0,00082	-0,00113	-0,00083	0,00081	0,0011	0,00082
	3	-0,0009	-0,00124	-0,00091	0,0009	0,00124	0,00094
LMD B3	1	-0,00085	-0,00076	-0,00091	0,0009	0,00078	0,00093
	2	-0,00086	-0,00075	-0,00088	0,00088	0,00076	0,00088
	3	-0,00081	-0,00073	-0,00086	0,00087	0,00075	0,0009

Tablica 6: Izmjerene deformacije uzoraka HMD B3 i LMD B3 pri opterećenju $F = 1,25$ kN

Uzorak	Maksimalne deformacije	
	Vlačne	Tlačne
FM B2	0,00136	-0,00135
HMD B2	0,00149	-0,00134
LBD B2	0,0017	-0,00154
HMD B3	0,00099	-0,00098
LMD B3	0,00085	-0,00082

U Tablici 7 prikazane su izmjerene deformacije na uzorcima HMD B3 i LMD B3 pri jednakoj sili $F = 1,25$ kN. U tablici 8 prikazana je usporedba prosječnih izmjerenih tlačnih i vlačnih deformacija s prosječnim analitički izvedenim deformacijama za silu $F = 1,25$ kN. Na slici 52 prikazan je dijagram s njihovim vrijednostima. Analitički dobivene deformacije za $E = 66,86$ GPa gotovo su jednake izmjerenima. Vidimo da je razlika između rezultata analitičkih i eksperimentalnih deformacija za uzorak HMD B3 manja od onih za LMD B3. Možemo pretpostaviti da je to posljedica ortotropnosti

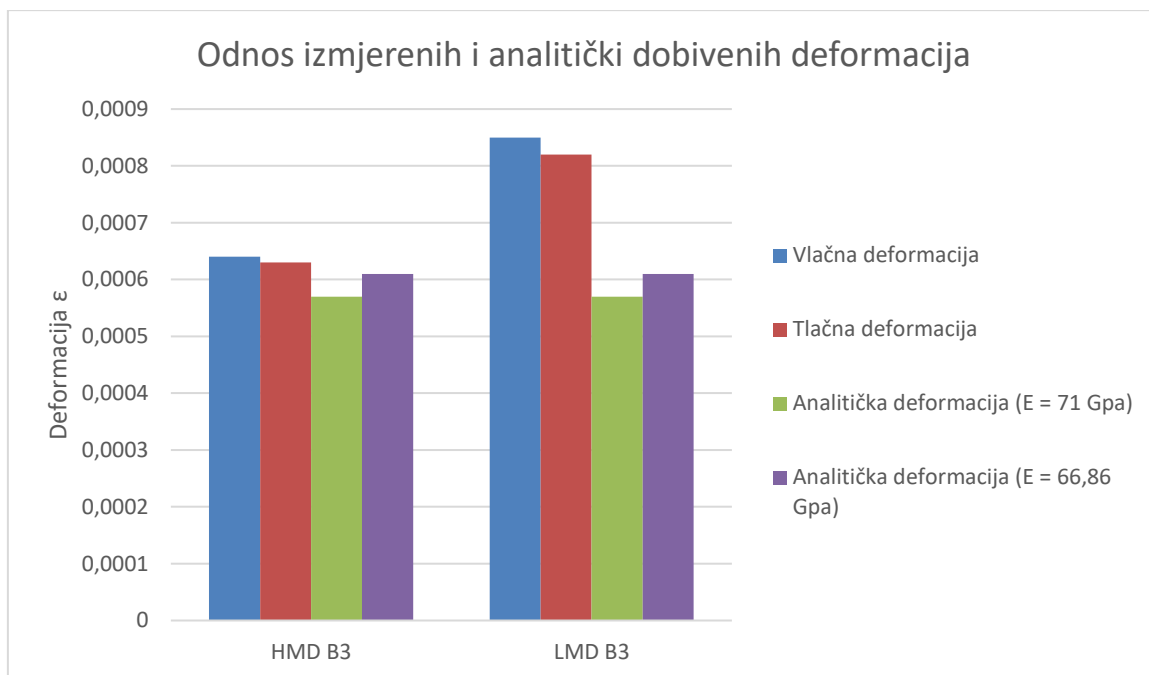
uzoraka. Naime, udaljenosti središta oslabljenja P_1 i P_2 nisu jednaki, zbog čega uzorci nemaju ista svojstva u oba smjera, točnije u smjeru osi x i osi y . Za uzorak HMD B3 udaljenost središta oslabljenja u smjeru osi x iznose $P_1 = 16$ mm, a za uzorak LMD B3 $P_1 = 9$ mm, dok je udaljenost po osi z jednaka za oba uzorka $P_2 = 12,7$ mm. To znači da je struktura uzorka HMD kruća u smjeru x nego u smjeru z , dok za uzorak LMD vrijedi suprotno. Ovime vidimo da će nam točnost rezultata dobivenih grednom teorijom uvelike ovisiti o strukturi heterogenosti. Ortotropnost uzorka nam ne dopušta da analitičkim putem dobijemo pravovaljane rezultate, već se moramo okrenuti nekoj drugoj metodi.

Tablica 7: Izmjerene deformacije uzoraka HMD B3 i LMD B3 pri opterećenju $F = 1,25$ kN

Uzorak	Redni br. testiranja	Maksimalne apsolutne deformacije					
		G.L.	G.S.	G.D.	D.L.	D.S.	D.D.
HMD B3	1	-0,00058	-0,00081	-0,00059	0,00062	0,00081	0,00061
	2	-0,00051	-0,00070	-0,00051	0,00049	0,00068	0,00051
	3	-0,00058	-0,00080	-0,00059	0,00058	0,00081	0,00061
LMD B3	1	-0,00085	-0,00076	-0,00091	0,0009	0,00078	0,00093
	2	-0,00086	-0,00075	-0,00088	0,00088	0,00076	0,00088
	3	-0,00081	-0,00073	-0,00086	0,00087	0,00075	0,0009

Tablica 8: Usporedba izmjerenih i analitički dobivenih deformacija

Uzorak	Prosječna vlačna deformacija	Prosječna tlačna deformacija	Prosječna analitički izvedena deformacija ($E = 71$ GPa)	Prosječna analitički izvedena deformacija ($E = 66,86$ GPa)
HMD B3	0,00064	-0,00063	$\pm 0,00057$	$\pm 0,00061$
LMD B3	0,00085	-0,00082	$\pm 0,00057$	$\pm 0,00061$



Slika 52: Dijagram odnosa izmjerenih i analitički dobivenih deformacija

8 ZAKLJUČAK

Nakon analitičke i eksperimentalne analize uzoraka HMD i LMD strukture uz FM kontrolne uzorke punog presjeka vidimo kako su rezultati dobivenih deformacija približno jednaki, no to nam ne odgovara na pitanje jesu li dobri. Naime, kao što smo vidjeli kroz poglavlje 7, o eksperimentalnoj analizi uzoraka, pojavljuju se mnoga pitanja na koja nam gredna teorija ne može dati odgovor. Prvo od tih pitanja je kako izračunati deformacije uzoraka HMD i LMD B2, čija struktura koja nije simetrična s obzirom na uzdužnu os nosača dovodi do pojave ne linearne elastične osi. Samim time više nemamo jednake deformacije na vrhu i dnu istog presjeka nosača te se njihov odnos svakim pomakom po osi x mijenja. Nadalje, gredna teorija ne objašnjava invertirane vrijednosti deformacija u srednjem i vanjskom presjeku. Možemo samo nagađati o međudjelovanju koncentracija naprezanja oko oslabljenja nosača, no to ne možemo potvrditi bez, na primjer, metode konačnih elemenata. Konačno dolazimo i do ne izotropne strukture oslabljenja nosača HMD i LMD koja je mogla biti uzrok odstupanja od razlika u izmjerenim i analitički dobivenim deformacijama. Ponovo, teorija greda nam ne može dati odgovor je li to ispravno ili ne, no možemo zaključiti da njena točnost pri nosačima ortotropne strukture ovisi o strukturi nosača, što joj ne ide u prilog. Vidimo kako da nam je teorija greda dala približno točne rezultate, no najveći problem je taj da su deformacije dobivene analitičkim putem u apsolutnoj vrijednosti manje od onih stvarnih, što nikako nije poželjan rezultat kod analitičkih metoda u inženjerskoj praksi. Možemo zaključiti kako točnost rezultata dobivenih grednom teorijom pada ovisno o povećanju omjera visine oslabljenja i visine uzorka. Radi svih ovih razloga pri izračunu nosača koji ili nisu heterogeni, ili nisu izotropni, trebali bi se okrenuti drugim metodama kao što su teorija elastičnosti ili metoda konačnih elemenata. Heterogeni ortotropni nosači nam pokazuju da ih možemo iskoristiti kao dobru alternativu homogenim izotropnim nosačima, no da moramo koristiti složenije numeričke metode pri njihovoj analizi, što uz napredak znanosti, ali i tehnologije ne bi trebalo stvarati veće probleme.

9 LITERATURA I IZVORI

- [1] V. Šimić, Otpornost materijala I, Zagreb: Školska knjiga, 1992.
- [2] Castelo Construction Lda, »The Castelo blog,« Castelo Construction Lda, 11. Lipanj 2013.. [Mrežno]. Available: <https://www.casteloconstruction.info>. [Pokušaj pristupa 26. Kolovoz 2020.].
- [3] T. Machnikowski, »Home building in Vancouver,« Prosinac 2011.. [Mrežno]. Available: <http://studio-tm.com>. [Pokušaj pristupa 26. Kolovoz 2020.].
- [4] shahe, »Civil engineers forum,« [Mrežno]. Available: <https://civilengineersforum.com>. [Pokušaj pristupa 26. Kolovoz 2020.].
- [5] Pretersa Prenavisa, »Technical commercial catalogue,« 2020.. [Mrežno]. Available: <https://www.pretersa.com>. [Pokušaj pristupa 26. Kolovoz 2020.].
- [6] C. Lennon, »Self build,« 14. Ožujak 2019.. [Mrežno]. Available: <https://selfbuild.ie>. [Pokušaj pristupa 26. Kolovoz 2020.].
- [7] A.J. Beveridge; M.A. Wheel; D.H. Nash;, »The micropolar elastic behaviour of model macroscopically heterogeneous materials,« International Journal of Solids and Structures, 50 (2013) 246-255
- [8] National Instruments, »Measuring Strain with Strain Gages,« National Instruments, 2020..