Fixed-pole interpolacija u linearnoj analizi mikropolarnog kontinuuma

Žiković, L.[1], Jelenić, G.[2]

Sažetak
U radu je predstavljena motivacija za primjenu interpolacije unutar tzv. metode nepomičnog pola (*fixed-pole* interpolation) ili srodne vezane interpolacije u linearnoj analizi 3D mikropolarnog kontinuuma. Interpolacija je inspirirana fixed-pole konceptom kojeg su predložili Borri i Bottasso u radovima [1,2] gdje je primijenjen na geometrijske nelinearne 3D grede. Koncept se pokazao kao naročito koristan u nelinearnoj dinamici, no nisu još poznati nikakvi pokušaji primjene u linearnoj analizi. U radu pokazujemo da je kod odgovarajuće primjene koncepta na Timošenkovoj gredi eliminirana pojava *shear-lockinga*. S obzirom na to da Timošenkova greda zapravo predstavlja 1D mikropolarni kontinuum, tako razvijen novi gredni konačni element predstavlja osnovu za daljnji razvoj 2D i 3D mikropolarnih konačnih elementa, temeljenih na nepomičnom polu.

Ključne riječi: fixed-pole koncept, Timošenkova greda, mikropolarni kontinuum, metoda konačnih elemenata

[1] **Laura Žiković, mag. ing. aedif**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: laura.zikovic@uniri.hr
[1] **prof. dr. sc. Gordan Jelenić**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: gordan.jelenic@uniri.hr

1 Uvod

Klasična (Cauchyjeva) teorija kontinuuma poprilično dobro opisuje ponašanje homogenih materijala što je i dokazano eksperimentalno na uzorcima od čelika ili aluminija. Međutim, ukoliko je mikrostruktura pojedinih materijala značajnija, analitička rješenja prema klasičnoj teoriji se ne podudaraju s onim eksperimentalnim [3]. Također, klasična teorija ne može opisati tzv. *size-effect* kod kojeg je uočeno da se tanji uzorci povrgnuti savijanju te torziji ponašaju kruće od debljih uzoraka izrađenih od istog materijala. Kako bi se mogli opisati efekti koje klasična teorija ne predviđa, razvijene su mnoge alternativne teorije među kojima je i mikropolarna (Cosseratova) teorija kontinuuma [3].

Interakcija između dvije čestice u mikropolarnoj teoriji ne odvija se samo preko vektora sile, nego i preko vektora momenta odnosno pripadajućeg dodatnog tenzora momentnih naprezanjima. Time se povećava i broj stupnjeva slobode te sada uz polje pomaka postoji dodatno polje mikrorotacije koje svakoj točki tijela dodjeljuje orijentaciju i potpuno je neovisno o makrorotaciji (antisimetričnome dijelu gradijenta polja pomaka). Utjecaj mikrorotacije vidljiv je kod posmičnih deformacija te dodatno prouzrokuje i kutnu deformaciju (zakrivljenost) [4]. Ukoliko se razmatra linearno elastični izotropni materijal prema mikropolarnoj teoriji, veza između dva nezavisna tenzora naprezanja i momentnih naprezanja te dva pripadajuća tenzora deformacija odnosno zakrivljenosti opisana je pomoću dva konstitutivnih tenzora četvrtog reda koji sadržavaju ukupno 6 međusobno nezavisnih materijalnih parametara [5]. Poznavanje vrijednosti tih materijalnih parametara ključ je za širu upotrebu mikropolarne teorije, no za njihovo jednoznačno određivanje nije još utvrđena metodologija. Razvoj robusnih i kvalitetnih konačnih elemenata važan je korak u daljnjoj primjeni mikropolarne teorije, gdje ti elementi predstavljaju neophodni preduvjet za efikasnu proceduru identificiranja materijalnih parametara iz eksperimentalnih mjerenja.

2 Primjena fixed-pole koncepta u linearnoj analizi Timošenkove grede

Borri i Bottasso su u radovima [1,2] predstavili fixed-pole koncept i primijenili ga na geometrijsko nelinearnoj analizi 3D grede što se pokazalo vrlo korisnim. Kao glavna zamisao je zamjena rezultante naprezanja $\boldsymbol{m}$ i specifičnog momenta količine gibanja $\boldsymbol{\pi}$, koji su u klasičnom pristupu definirani s obzirom na referentnu os grede u poprečnom presjeku, sa novom rezultantom naprezanja $\bar{\boldsymbol{m}}$ i specifičnim momentom količine gibanja $\bar{\boldsymbol{\pi}}$ koji su definirani s obzirom na odabranu ishodišnu točku cijelog promatranog sustava (nepomičan pol). Također, objedinjeno je polje pomaka i rotacije s obzirom na nepomičan pol u novo jedinstveno polje nepoznanica. Do sada nisu poznata nikakva istraživanja koncepta u linearnoj analizi gdje se i dalje može očekivati jedinstveni opis svih nepoznatih polja kao prednost koncepta, dok pojedini nedostaci koncepta u nelinearnoj analizi iščezavaju (konfiguracijski tenzor postaje linearan). Vođeni tim očekivanjima, ali željom da istražimo nove prednosti koncepta, u nastavku će se prikazati generalizacija koncepta na linearnu statičku analizu grede.

2.1 Osnovne jednadžbe

Razmotrimo segment Timošenkove grede duljine $x_2^1 - x_1^1 = \Delta l$ opterećenog distribuiranom silom $\bar{\boldsymbol{n}}$ i momentom $\bar{\boldsymbol{m}}$, gdje su x_1^1 i x_2^1 koordinate osi grede na rubovima segmenta, gdje dodatno djeluju odgovarajuće sile i momenti koji održavaju segment u ravnoteži. Odatle se dobije se fixed-pole diferencijalna jednadžba ravnoteže

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{m} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n} \end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{n}} \\ \tilde{\bar{\boldsymbol{m}}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \tag{1}$$

gdje su $\boldsymbol{n}$ i $\boldsymbol{m}$ vektori prostornih rezultanti naprezanja, a $\boldsymbol{r}$ je vektor položaja referentne osi duž grede s obzirom na promatrano ishodište. Vanjska distribuirana opterećenja duž segmenta opisana su vektorom sila i momenta $\bar{\boldsymbol{n}}$ i $\tilde{\bar{\boldsymbol{m}}}$, gdje je $\tilde{\bar{\boldsymbol{m}}} = \bar{\boldsymbol{m}} + \boldsymbol{r} \times \bar{\boldsymbol{n}}$ ukupan moment s obzirom na ishodište (*nepomični pol*). Poznavajući rubne uvjete i diferencijalne jednadžbe ravnoteže te koristeći princip virtualnog rada mogu se dobiti kinematičke jednadžbe, koje u linearnom obliku glase

$$\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Lambda}_0^T (\boldsymbol{u}' + \boldsymbol{t}_{01} \times \boldsymbol{\theta}) \tag{2}$$
$$\mathbf{K} = \boldsymbol{\Lambda}_0^T \boldsymbol{\theta}' \tag{3}$$

gdje je $\boldsymbol{\Gamma}$ vektor normalnih i posmičnih deformacija, $\mathbf{K}$ je vektor rotacijskih deformacija (zakrivljenosti), dok je rotacijski tenzor $\boldsymbol{\Lambda}_0$ konstantan za ravne grede i jednak jediničnom tenzoru za gredu čiji se lokalni koordinatni sistem podudara s globalnim. Za linearno elastične materijale slijede konstitutivne jednadžbe [6]

$$\mathbf{N} = \boldsymbol{C_n} \boldsymbol{\Gamma} \tag{4}$$
$$\mathbf{M} = \boldsymbol{C_m} \boldsymbol{\theta}' \tag{5}$$

gdje su $\mathbf{N} = \boldsymbol{\Lambda}_0^T \mathbf{n}$ i i $\mathbf{M} = \boldsymbol{\Lambda}_0^T \boldsymbol{m}$ vektori materijalnih rezultanti naprezanja, a $\boldsymbol{C_n} = diag(EA, GA_1, GA_2)$ i $\boldsymbol{C_m} = diag(\mathrm{GIt}, EI_1, \mathrm{EI}_2)$ su dijagonalne konstitutivne matrice, gdje su E i G moduli elastičnosti i smicanja, A je površina presjeka, A_1 i A_2 su odgovarajuće posmične površine presjeka duž glavnih osi presjeka, I_t je torzijska konstanta presjeka, a I_1 i I2 su glavni momenti površine drugog reda presjeka. Fixed-pole koncept uvodi novo kinematičko polje koje objedinjuje polje pomaka i rotacije s obzirom na nepomični pol te su sada naša nepoznata polja $\boldsymbol{\rho}$ i $\boldsymbol{\theta}$, gdje je novo polje $\boldsymbol{\rho}$ prema [7]

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{u} - \frac{1}{\mathrm{n}} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{r_0} \tag{6}$$

a njegova derivacija

$$\boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{u}' + \frac{1}{\mathrm{n}} \widehat{\boldsymbol{r_0}} \boldsymbol{\theta}' + \frac{1}{\mathrm{n}} \widehat{\boldsymbol{t_{0,1}}} \boldsymbol{\theta} \tag{7}$$

gdje je $\frac{1}{\mathrm{n}}$ koeficijent koji je ovisan o broju čvorova *n* pojedinog elementa duž koordinate osi (uveden umjesto jediničnog keficijenta u originalnom fixed-pole pristupu [2] s ciljem izboljšanja rezultata), operator $\hat{\bullet}$ označava antisimetričnu matricu koja zamjenjuje vektorski produkt tako da vrijedi $\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{r_0} = \widehat{\boldsymbol{r_0}} \boldsymbol{\theta}$, dok je $\boldsymbol{t_{0,1}}$ jedinični bazni vektor normale na poprečni presjek grede. Ukoliko u diferencijalnu jednadžbu ravnoteže uvrstimo konstitutivne i kinematičke jednadžbe te preko zapisa (7) izrazimo $\boldsymbol{u}'$ dobije se konačan izraz diferencijalne jednadžbe ravnoteže

$$\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \widehat{\boldsymbol{r_0}} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{C_n} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C_m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{n}}\widehat{\boldsymbol{t_{0,1}}} - \frac{1}{\mathrm{n}}\widehat{\boldsymbol{r_0}}\boldsymbol{I}\frac{d}{dx} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\frac{d}{dx} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\rho}' \\ \boldsymbol{\theta} \end{Bmatrix}\right)' + \begin{Bmatrix} \overline{\boldsymbol{n}} \\ \tilde{\overline{\boldsymbol{m}}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \tag{8}$$

gdje je $\frac{d}{dx}$ diferencijalni operator duž osi x promatranog grednog segmenta dok je $\boldsymbol{I}$ jedinična matrica dimenzija 3x3.

2.2 Formulacija i primjena fixed-pole grednog konačnog elementa

Problem je gore zapisan u obliku jake formulacije, odnosno definirane su diferencijalne jednadžbe ravnoteže, kojima je potrebno pridružiti i odgovarajuće rubne uvjete. Za rješavanje takvog problema koristit ćemo Galerkinovu koja u konačnici dovodi do slabe formulacije

$$\boldsymbol{\delta p^T} \int_0^L \left[(\boldsymbol{N^T T^T}) \begin{bmatrix} \boldsymbol{C_n} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C_m} \end{bmatrix} (\boldsymbol{TN})\right] dx\, \boldsymbol{p} = \boldsymbol{\delta p^T}\left[\int_0^L \left(\boldsymbol{N^T}\begin{Bmatrix} \overline{\boldsymbol{n}} \\ \tilde{\overline{\boldsymbol{m}}} \end{Bmatrix}\right) dx + \begin{Bmatrix} f_{\overline{n}} \\ f_{\tilde{\overline{m}}} \end{Bmatrix}_i\right] \tag{9}$$

gdje $\boldsymbol{\delta p}$ i $\boldsymbol{p}$ su vektori testnih i stvarnih stupnjeva slobode $\boldsymbol{\rho}$ i $\boldsymbol{\theta}$ te se za njihovu interpolaciju koristila standardna Lagrangeova interpolacija s pripadajućom matricom interpolacijskih funkcija $\boldsymbol{N}$. Komponente vanjskog opterećenja su koncentrirane sile i momenti $f_{\overline{\boldsymbol{n}}}$ i $f_{\tilde{\overline{\boldsymbol{m}}}}$ u čvorovima $i = 1 \dots \mathrm{n}$ elementa te distribuirane sile i momenti $\overline{\boldsymbol{n}}$ **i** $\tilde{\overline{\boldsymbol{m}}}$ koji se interpoliraju duž osi x grednog elementa, gdje su $f_{\tilde{\overline{\boldsymbol{m}}}}$ i $\tilde{\overline{\boldsymbol{m}}}$ ukupni momenti s obzirom na nepomičan pol. Matrica T je jednaka

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & -\frac{1}{\mathrm{n}}\widehat{\boldsymbol{r_0}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}\frac{d}{dx} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\frac{d}{dx} \end{bmatrix} + \frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{n}}\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \widehat{\boldsymbol{t_{0,1}}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Vektor položaja $\boldsymbol{r_0}$ je također interpoliran jednakim interpolacijskim funkcijama $\boldsymbol{N}$ koje su odabrane za interpoliranje vektora stupnjeva slobode.

Ukoliko izvedemo matricu krutosti grednog konačnog elementa prema formulaciji (9) i izrazimo je u odnosu na standardne stupnjeve slobode (pomake i rotacije) dobit ćemo identičnu matricu krutosti kao i klasičnom postupkom uz primjenu reducirane numeričke integracije čime se može zaključiti da će biti uklonjena pojava *shear-lockinga* [8]. Također, osim za dvočvorne gredne konačne elemente, analogno vrijedi i za elemente s više čvorova. Važno je naglasiti da formulacija (9) koristi nestandardne stupnjeve slobode $\boldsymbol{\rho}$, koje međutim možemo lako izraziti preko standardnog polja pomaka $\boldsymbol{u}$ poznavajući izraz (6).

3 Fixed-pole interpolaciju u analizi mikropolarnog kontinuuma

U linearnoj numeričkoj analizi 3D mikropolarnog kontinuuma primijenit ćemo izoparametarske trilinearne heksaedarske konačne elemente, također uz upotrebu interpolacije metodom nepomičnog pola. Za formuliranje jednadžbe konačnog elementa koristimo princip virtualnog rada, koji nalaže da za stanje ravnoteže cijelog sustava virtualni rad unutarnjih sila mora biti jednak virtualnom radu vanjskih sila što se može zapisati kao

$$\int_V (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \boldsymbol{C_1}\, \boldsymbol{\varepsilon} + \bar{\boldsymbol{\kappa}}^T \boldsymbol{C}_2 \boldsymbol{\kappa})dV = \int_V (\bar{\boldsymbol{u}}^T \boldsymbol{p}_v + \bar{\boldsymbol{\varphi}}^T \boldsymbol{m}_v)dV + \int_S (\bar{\boldsymbol{u}}^T \boldsymbol{p}_s + \bar{\boldsymbol{\varphi}}^T \boldsymbol{m}_s)\, dS \qquad (11)$$

gdje su $\bar{\mathbf{u}}$ i $\bar{\boldsymbol{\varphi}}$ virtualni vektori pomaka i mikrorotacije, $\boldsymbol{C_1}$ i $\boldsymbol{C_2}$ konstitutivne matrice koje sadrže 6 međusobno nezavisnih materijalnih parametara elastičnog mikropolarnog kontinuuma (vidi npr. [4,9] za detalje), $\boldsymbol{p_v}, \boldsymbol{m_v}$ i $\boldsymbol{p_s}, \boldsymbol{m_s}$ su volumenske odnosno površinske sile i momenti. Vektori virtualnih deformacija i virtualnih zakrivljenosti $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ i $\bar{\boldsymbol{\kappa}}$ mogu se zapisati kao

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{D_u}\bar{\mathbf{u}} + \boldsymbol{I_\varphi}\, \bar{\boldsymbol{\varphi}} \qquad (12)$$

$$\bar{\boldsymbol{\kappa}} = \boldsymbol{D_\varphi}\bar{\boldsymbol{\varphi}} \qquad (13)$$

gdje su $\boldsymbol{D_u} = \boldsymbol{D_\varphi} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \end{bmatrix}^T$ matrice diferencijalnih operatora dok $\boldsymbol{I_\varphi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ predstavlja permutacijski tenzor. Standardnom Lagrangeovom interpolacijom se interpolira polje mikrorotacije, dok se za polje pomaka uvodi interpolacija metodom nepomičnog pola prema izrazu (7) te se sad vektor virtualnih deformacija može zapisati kao

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{D_\rho}\bar{\boldsymbol{\rho}} - \frac{1}{\mathrm{n}}\widehat{\boldsymbol{r_0}}\boldsymbol{D_\varphi}\, \bar{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\mathrm{n}+1}{\mathrm{n}} \boldsymbol{I_\varphi}\, \bar{\boldsymbol{\varphi}}. \qquad (14)$$

Stvarna i virtualna kinematička polja se aproksimiraju Lagrangeovom interpolacijom te se može napisati jednadžba konačnog elementa *j*

$$\begin{aligned} &\bar{\boldsymbol{p}}^T \Bigg[\int_V (\boldsymbol{N_\rho}^T\boldsymbol{D_\rho} - \frac{1}{\mathrm{n}}\widehat{\boldsymbol{r_0}}\boldsymbol{N_\rho}^T\boldsymbol{D_\rho} + \frac{\mathrm{n}+1}{\mathrm{n}}\, \boldsymbol{N_\varphi}^T\boldsymbol{I_\varphi}^T)\, \boldsymbol{C_1}\, (\boldsymbol{D_\rho}^T\boldsymbol{N_\rho} - \frac{1}{\mathrm{n}}\widehat{\boldsymbol{r_0}}\boldsymbol{D_\rho}^T\boldsymbol{N_\rho} \\ &+ \frac{\mathrm{n}+1}{\mathrm{n}}\, \boldsymbol{I_\varphi N_\varphi}) + (\boldsymbol{N_\varphi}^T\boldsymbol{D_\varphi})\, \boldsymbol{C_2}\, (\boldsymbol{D_\varphi}^T\boldsymbol{N_\varphi})]dV\Bigg]\, \boldsymbol{p} - \bar{\boldsymbol{p}}^T\Bigg[\int_V \left(\boldsymbol{N}^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ -\frac{1}{\mathrm{n}}\widehat{\boldsymbol{r_0}} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{p_v} \\ \boldsymbol{m_v} \end{Bmatrix}\right) \\ &+ \int_S \left(\boldsymbol{N}^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ -\frac{1}{\mathrm{n}}\widehat{\boldsymbol{r_0}} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{p_s} \\ \boldsymbol{m_s} \end{Bmatrix}\right) dS\Bigg] = \bar{\boldsymbol{p}}^T(\boldsymbol{K_j p} - \boldsymbol{R_j}) = \boldsymbol{0} \end{aligned} \qquad (15)$$

gdje je $\boldsymbol{D_\rho} = \boldsymbol{D_u} = \boldsymbol{D_\varphi}$, $\bar{\boldsymbol{p}}$ i $\boldsymbol{p}$ su vektori virtualnih, odnosno, stvarnih nepoznanica elementa. Za stanje ravnoteže cijelog sustava suma virtualnih radova svih konačnih elemenata mora biti jednaka nuli, tj. $\mathbf{K}\boldsymbol{r} = \mathbf{R}$, gdje $\boldsymbol{r}$ predstavlja globalni vektor čvornih nepoznanica, $\mathbf{K}$ globalnu matricu krutosti i $\mathbf{R}$ globalni vektor vanjskog opterećenja.

Ukoliko se vektori virtualnih i stvarnih stupnjeva slobode jednako interpoliraju, tj. ukoliko se oba vektora interpoliraju interpolacijom nepomičnog pola, elementi ne prolaze *patch* testove. Time konvergencija nije osigurana te ćemo prema radu [8], u kojem je uočen isti problem kod primjene vezane interpolacije, primijeniti Petrov-Galerkinovu metodu. U Petrov-Galerkinovoj metodi koriste se različite interpolacije virtualnih i stvarnih kinematičkih polja. U našem slučaju ćemo koristiti standardnu Lagrangeovu interpolaciju virtualnog polja $\bar{\boldsymbol{\rho}}$, dok je stvarno polje $\boldsymbol{\rho}$ interpolirano metodom nepomičnog pola, a interpolacija mikrorotacije ostaje Lagrangeva. Razvoj ovih konačnih elemenata je u postupku.

4 Zaključak i budući rad

Kao uvod u primjenu koncepta nepomičnog pola u linearnoj analizi izvedena je formulacija Timošenkovog grednog konačnog elementa. Pri validaciji izvedenog elementa ustanovljena je jednaka konvergencija kao i kod standardnog grednog elementa na kojem je primijenjena reducirana integracije te je time eliminirana pojava *shear-lockinga*. Timošenkova greda zapravo predstavlja 1D mikropolarni kontinuum te smo koncept proširili i na analizu 3D mikropolarnog kontinuuma. Unutar ovog istraživanja u nastavku će se izvedena formulacija 3D mikropolarnog konačnog elementa detaljnije testirati na poznatim *patch* testovima te će se primijeniti i na 2D elemente, a nadalje i na dinamičku analizu.

Zahvale

Rezultati prikazani u ovom radu dobiveni su u sklopu rada na projektu IP 1732 Hrvatske zaklade za znanost (Fixed-Pole Concept in Numerical Modelling of Cosserat Continuum). Istraživanje je dodatno podržalo Sveučilište u Rijeci putem potpore br. 1413 (Računski i eksperimentalni postupci za određivanje materijalnih parametara Cosseratovog kontinuuma)

Literatura

[1] Borri, M. i Bottasso, C.; An intrinsic beam model based on a helicoidal approximation - Part I: Formulation; International Journal for Numerical Methods in Engineering
[2] Bottasso, C. i Borri, M.; Integrating finite rotations; Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering; 1998; vol. 164, no. 3-4; str. 307-331.
[3] Nowacki, W.; Theory of micropolar elasticity, Springer-Verlag; Vienna, 1972.
[4] Grbčić, S.; Linked Interpolation and Strain Invariance in Finite-Element Modelling of Micropolar Continuum, PhD Thesis; Rijeka, 2018.
[5] Eringen, A. C.; Microcontinuum Field Theories: I. Foundations and Solids; Springer-Verlag; New York, 2012.;
[6] Jelenić, G. i Crisfield. M. A.; Geometrically exact 3D beam theory: implementation of strain-invariant finite element for static and dynamics; I. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering; 1999; vol. 171; str. 141-171.
[7] Jelenić, G.; Exact solution of a spatially curved beam problem (problem-dependent formulation using four i. constants) – the fixed-pole approach; osobne bilješke; Rijeka, 2016.
[8] Bathe, K. J.; Finite Element procedures; Prentice Hall; New Jersey, 1996.
[9] Grbčić, S. i Jelenić, G.; Quadrilateral 2D linked-interpolation finite elements for micropolar continuum; Acta Mechanica Sinica; 2019; vol. 35; str. 1001-1020.